

Esta es una versión casi idéntica de:

TEMAS DE OPTIMIZACIÓN

Héctor Manuel Mora Escobar
Departamento de Matemáticas
Universidad Nacional de Colombia

Bogotá
enero de 2008

ISBN 978-958-719-111-0

A Hélène y Nicolás

Índice general

Prólogo	vii
1. Métodos de optimización lineal	1
1.1. Método simplex acotado	1
1.1.1. Una fase	4
1.1.2. Dos fases	10
1.2. Método de descomposición de Dantzig y Wolfe	15
1.2.1. Conjunto acotado	19
1.2.2. Conjunto no acotado	33
2. Optimización entera	53
2.1. Cortes de Gomory	61
2.2. Ramificación y acotamiento	65
2.2.1. Escogencia de la variable que bifurca	72
2.2.2. Escogencia del nodo	74
2.2.3. Escogencia de la rama	76
2.2.4. Aproximaciones	84
3. Optimización en grafos	89
3.1. Conceptos iniciales	89
3.1.1. Grafos dirigidos	90
3.1.2. Detección de descendientes de un nodo	96
3.1.3. Detección de un circuito	99
3.1.4. Grafos no dirigidos	102
3.2. Camino más corto	104

ÍNDICE GENERAL

3.2.1. Introducción	104
3.2.2. Algoritmo de Dijkstra	106
3.2.3. Algoritmo de Floyd-Warshall	112
3.3. Flujo máximo	116
3.3.1. Introducción	116
3.3.2. Algoritmo de Ford-Fulkerson	119
3.4. Flujo de costo mínimo	130
3.5. Ruta crítica	135
3.5.1. De la tabla de actividades a la red	138
3.5.2. Simplificación de una red	141
3.5.3. Preproceso de la lista de actividades previas	142
3.6. Árbol generador minimal	146
3.6.1. Detección de un ciclo	147
3.6.2. Algoritmo de Kruskal	151
3.6.3. Algoritmo de Prim	153
3.6.4. Versión matricial del algoritmo de Prim	154
4. Optimización no diferenciable	165
4.1. Introducción	165
4.1.1. Ejemplos de problemas de OND	165
4.1.2. Algunos conceptos	167
4.1.3. Formas generales	168
4.1.4. Subgradiente, subdiferencial, optimalidad	170
4.1.5. Algunos resultados	172
4.2. Métodos de OND	173
4.3. Método de planos cortantes	174
4.3.1. Problema no restringido	175
4.3.2. Problema restringido	180
4.3.3. Método de haces penalizados	186
4.4. ACCPM	187
4.4.1. Centro analítico	188
4.4.2. Métodos de punto interior	192
4.4.3. Método de Newton primal factible	195

ÍNDICE GENERAL

4.4.4. Algoritmo potencial afín	199
4.4.5. Método primal-dual factible	201
4.4.6. Algoritmo potencial primal-dual	204
4.4.7. Restricción adicional en el método primal	206
4.4.8. Algoritmo ACCPM	208

ÍNDICE GENERAL

Prólogo

Este libro presenta algunos temas de optimización que, aunque son muy importantes, generalmente no se ven en un primer curso de Optimización. Puede servir para un curso de un semestre para estudiantes avanzados de pregrado o para uno de posgrado.

En el primer capítulo hay dos temas de Optimización Lineal, el método simplex acotado y el método de descomposición de Dantzig y Wolfe.

El segundo capítulo trata sobre Optimización Entera. Está el método de cortes de Gomory y el método de bifurcación y acotamiento (*branch and bound*) con varios criterios.

El tercer capítulo se refiere a Optimización en Grafos. Los temas tratados son los clásicos: ruta más corta, flujo máximo, flujo de costo mínimo, ruta crítica y árbol generador de costo mínimo.

El último capítulo tiene dos temas de Optimización No Diferenciable: método de planos de corte y ACCPM (*analytic center cutting plane method*). También hay una parte dedicada a métodos de punto interior para el cálculo del centro analítico.

Hay algunos conocimientos o conceptos necesarios para la buena comprensión de algunos temas. Ellos son: conjuntos convexos, puntos y direcciones extremas, teorema de representación (de conjuntos poliédricos) en Optimización Lineal, método simplex con obtención de direcciones extremas cuando hay óptimo no acotado y método simplex revisado. También es necesario disponer y saber utilizar un software para Optimización Lineal que, preferiblemente, dé direcciones extremas cuando hay óptimo no acotado.

En las páginas electrónicas del autor, se encontrará una fe de erratas

CAPÍTULO 0. PRÓLOGO

del libro, que se irá completando a medida que los errores sean detectados. Actualmente las direcciones son:

www.matematicas.unal.edu.co/~hmora/

www.geocities.com/hectormora

El autor estará muy agradecido por los comentarios, sugerencias y correcciones enviados a:

hmmorae@unal.edu.co

hectormora@yahoo.com

Quiero agradecer especialmente al profesor Jaime Malpica del Departamento de Ingeniería de Sistemas e Industrial y a todos los estudiantes del curso Optimización de la Carrera de Matemáticas y de las Maestrías de Matemáticas y de Matemáticas Aplicadas, en particular a Jhon Jaiver Rodríguez, Biviana Suárez y Diana Martínez. Las sugerencias, comentarios y correcciones de todos ellos fueron muy útiles.

Muchas gracias al profesor Gustavo Rubiano, Director de la Oficina de Publicaciones de la Facultad de Ciencias por su eficiencia y continuo apoyo durante varios años.

Deseo agradecer a la Universidad Nacional por haberme permitido destinar un semestre sabático a esta obra, este tiempo fue una parte muy importante del necesario para la realización del libro.

Notación

\mathbb{R} = conjunto de números reales.

$\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$.

\mathbb{Z} = conjunto de números enteros.

$\mathbb{Z}_+ = \{x \in \mathbb{Z} : x \geq 0\}$.

$N = \{1, 2, \dots, n\}$

$\mathcal{M}(m, n) = \mathbb{R}^{m \times n}$ = conjunto de matrices reales $m \times n$, o sea, de m filas y n columnas. Si $A \in \mathcal{M}(m, n)$, entonces A es de la forma:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

a_{ij} = elemento o entrada de la matriz A , en la fila i y en la columna j .

$\mathcal{M}(n, 1) = \mathbb{R}^{n \times 1} = \{ \text{matrices columna de } n \text{ componentes} \}$.

$\mathcal{M}(1, n) = \mathbb{R}^{1 \times n} = \{ \text{matrices fila de } n \text{ componentes} \}$.

$\mathbb{R}^{1 \times 1} = \mathbb{R}$.

A^T = transpuesta de la matriz A .

$\mathbb{R}^n = \{ (x_1, x_2, \dots, x_n) : x_j \in \mathbb{R} \ \forall j \}$.

$\mathbb{R}^n := \mathcal{M}(n, 1) = \mathbb{R}^{n \times 1}$, es decir:

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) := \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$x^T = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]$$

$\mathbb{R}_+^n = \{x \in \mathbb{R}^n : x \geq 0\}$.

$\mathbb{Z}^n = \mathbb{Z}^{n \times 1}$ = conjunto de matrices $n \times 1$ con entradas (elementos) enteras.

$\mathbb{Z}_+^n = \{x \in \mathbb{Z}^n : x \geq 0\}$.

$A_{i \cdot} =$ fila i -ésima de la matriz $A = [a_{11} \ a_{i2} \ \dots \ a_{in}]$.

$A_{\cdot j} =$ columna j -ésima de la matriz $A = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$.

$A^k = A^{(k)}$ = matriz A en la iteración k , $k = 0, 1, 2 \dots$

n = número de variables.

m = número de restricciones.

$p = n - m$ = número de variables libres (problemas en la forma estándar).

$z = c^T x = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$ = función objetivo o función económica (generalmente para minimización).

$c = (c_1, c_2, \dots, c_n) = [c_1 \ c_2 \ \dots \ c_n]^T$ = vector de costos.

z es acotado $\Leftrightarrow z$ es acotado inferiormente (problema de minimización).

$A_{i \cdot} x = a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \dots + a_{in} x_n$ = lado izquierdo de la restricción i .

b_i = término independiente o lado derecho de la restricción i .

$\min z :=$ minimizar z .

$\max z :=$ maximizar z .

$x \geq y \Leftrightarrow x_i \geq y_i$ para todo i .

$x \geq 0 \Leftrightarrow x_i \geq 0$ para todo i .

$$\begin{array}{l} \min z = c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0. \end{array} \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{array}{l} \min z = c^T x \\ \text{sujeto a} \\ Ax = b \\ x \geq 0. \end{array}$$

$|S|$ = número de elementos del conjunto S .

F = conjunto admisible o factible de un problema de optimización.

z^* = valor óptimo de z , cuando existe.

$S^* = S_f^* = \operatorname{Argmin}_{x \in S} f(x) = \{\bar{x} \in S : f(\bar{x}) \leq f(x), \forall x \in S\}.$

x^* = solución o minimizador, cuando existe, de un problema de optimización.

$|C| = \sharp(C) =$ cardinal del conjunto C .

$\wp(X) = \{A : A \subseteq X\} =$ conjunto de subconjuntos de X .

$\wp_k(X) = \{A : A \subseteq X, |A| = k\}.$

$\wp_{ks}(X) = \wp_k(X) \cup \wp_s(X).$

Cuando haya gráficas con sistema de coordenadas, el eje horizontal es para x_1 , el vertical es para x_2 , el horizontal es positivo hacia la derecha, el vertical es positivo hacia arriba.

En la escritura de números decimales, los enteros están separados de los decimales por medio de un punto. No se usa la notación española (los enteros están separados de los decimales por una coma). No se utiliza un símbolo para separar las unidades de mil de las centenas.

Capítulo 1

Métodos de optimización lineal

1.1. Método simplex acotado

Este método, una adaptación del simplex, se aplica eficientemente a problemas de OL que se pueden expresar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \min \ z &= c^T x \\ A_i \cdot x &\leq b_i, \quad i \in M_1 \subseteq M = \{1, 2, \dots, m\}, \\ A_i \cdot x &= b_i, \quad i \in M_2 \subseteq M \setminus M_1, \\ A_i \cdot x &\geq b_i, \quad i \in M_3 = M \setminus (M_1 \cup M_2), \\ u_j &\leq x_j \leq v_j, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Los datos son: $c \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^{m \times 1}$, $u \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, $v \in \tilde{\mathbb{R}}^{n \times 1}$. Se supone que para todo j

$$\begin{aligned} u_j &\leq v_j, \\ v_j &\in \tilde{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}. \end{aligned}$$

Las restricciones $u_j \leq x_j \leq v_j$, llamadas restricciones de caja, se pueden considerar como restricciones “normales”. Esto hace agregar filas a la matriz A . Dependiendo de los valores u_i , v_j , pueden ser hasta $2n$ filas más. Como

usualmente se convierte el problema a la forma estándar, entonces hay $2n$ variables de holgura adicionales. Además las restricciones $x_j \geq u_j$ dan origen a n variables artificiales. Pero todas estas filas adicionales están compuestas casi exclusivamente por ceros. En cada una de esas filas, además de los ceros, hay un 1 o un -1 .

El objetivo del método simplex acotado, MSA, es trabajar únicamente con las restricciones originales y adaptar el simplex para considerar implícitamente las restricciones de caja. Así se evita trabajar con una matriz mucho más grande.

Por ejemplo, para el problema

$$\begin{aligned} \min \ z &= c^T x \\ Ax &\geq b \\ u &\leq x \leq v \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

al convertir las restricciones de caja en restricciones normales, se tendría una primera fase con una matriz de tamaño $(m+2n) \times (n+m+2n+m+n)$, ya que hay n variables originales, m variables de holgura por $Ax \geq b$, $2n$ holguras por las restricciones de caja, m variables artificiales para $Ax \geq b$ y n variables artificiales para las desigualdades $x_j \geq v_j$. En resumen, $(m+2n) \times (2m+4n)$. Si las restricciones de caja se consideran implícitamente, se tiene una primera fase con una matriz de tamaño $m \times (n+2m)$. Supongamos que $m = 10$, $n = 20$. En el primer caso la matriz tendría 5000 entradas, en el caso implícito 400.

La primera simplificación, muy útil, consiste en considerar únicamente variables no negativas con cotas superiores. Para esto basta con hacer un cambio de variable (en realidad n)

$$\begin{aligned} x'_j &= x_j - u_j, \\ \text{entonces } u_j - u_j &\leq x_j - u_j \leq v_j - u_j, \\ 0 &\leq x'_j \leq v'_j, \end{aligned}$$

donde $x'_j = x_j - u_j$, $v'_j = v_j - u_j$. Así el problema

$$\min \ z = c^T x$$

$$\begin{aligned}
A_i \cdot x &\square_i b_i, \quad i = 1, \dots, m, \\
u \leq x &\leq v, \\
x &\geq 0,
\end{aligned}$$

donde $\square_i \in \{\leq, =, \geq\}$, se convierte en

$$\begin{aligned}
\min \quad z' &= c^T x' \\
A_i \cdot x' &\square_i b'_i, \\
x' &\leq v', \\
x' &\geq 0,
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
z &= z' + K \\
K &= c^T u \\
b'_i &= b_i - \sum_{j=1}^n u_j a_{ij} \\
b'_i &= b_i - A_i \cdot u \\
\text{o sea, } b' &= b - \sum_{j=1}^n u_j A_{\cdot j} \\
b' &= b - A u \\
v' &= v - u.
\end{aligned}$$

Después de obtener los valores óptimos de x' y z' , es necesario regresar a las variables iniciales:

$$\begin{aligned}
x &= x' + u \\
z &= z' + K.
\end{aligned}$$

Ejemplo 1.1. El problema

$$\begin{aligned}
\max \quad \zeta &= 5\xi_1 + 7\xi_2 + 4\xi_3 \\
\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 &\leq 40 \\
\xi_1 + 2\xi_2 + \xi_3 &\leq 58
\end{aligned}$$

$$4 \leq \xi_1 \leq 30$$

$$0 \leq \xi_2 \leq 15$$

$$5 \leq \xi_3 \leq +\infty$$

se convierte en

$$\begin{aligned} \min \ z &= -5x_1 - 7x_2 - 4x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 &\leq 31 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &\leq 49 \\ x_1 &\leq 26 \\ x_2 &\leq 15 \\ x_3 &\leq +\infty \\ x &\geq 0. \quad \diamond \end{aligned}$$

1.1.1. Una fase

El MSA, en el caso de una sola fase, requiere, lo mismo que el simplex, un problema en la forma estándar, tener la matriz identidad y términos independientes no negativos:

$$\begin{aligned} \min \ z &= c^T x \\ Ax &= b \\ 0 \leq x &\leq v, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} c &\in \mathbb{R}^{n \times 1}, \\ A &\in \mathbb{R}^{m \times n}, \\ b &\in \mathbb{R}^{m \times 1}, \\ v &\in \mathbb{R}^{n \times 1}, \\ b &\geq 0, \end{aligned}$$

existe $\beta \in N^m$ tal que

$$A(:, \beta) = I_m,$$

con $N = \{1, 2, \dots, n\}$. A lo largo de este documento se utiliza ampliamente la notación de Matlab y Scilab. Así $A(:, \beta)$ es la matriz obtenida al tomar de A las columnas correspondientes a los valores del vector β . Sea $\lambda \in N^p$, con $p = n - m$, el vector con los índices de las variables libres o no básicas.

En el simplex usual, la solución básica obtenida

$$\begin{aligned} x_B &= x(\beta) = b, \\ x_L &= x(\lambda) = 0 \end{aligned}$$

es factible. En el MSA, se requiere adicionalmente que, el anterior vector x cumpla con las cotas superiores, o sea, se debe cumplir que

$$x_B = b \leq v_B = v(\beta).$$

En resumen, el problema que se va a resolver es

$$\begin{aligned} \min \quad & z = c^T x \\ & Ax = b \\ & 0 \leq x \leq v, \end{aligned} \tag{PA}$$

con las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} & b \geq 0, \\ & A(:, \beta) = I_m, \\ & b \leq v_B. \end{aligned}$$

Ejemplo 1.2. En el siguiente problema

$$\begin{aligned} \min \quad & z = 10x_1 - 11x_2 + 12x_3 - 14x_4 \\ & x_1 + 5x_3 + x_4 = 6 \\ & 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 4 \\ & x_1 \leq 10 \\ & x_2 \leq 5 \\ & x_4 \leq 3 \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

la solución básica inicial, $x = (0, 4, 0, 6)$, no cumple con las cotas superiores. Esto quiere decir que la cuarta columna no sirve para formar la identidad. Se requiere introducir una variable artificial no acotada o con cota superior mayor que 6. \diamond

El MSA trabaja en realidad con $2n$ variables, las variables x_1, x_2, \dots, x_n y sus holguras correspondientes h_1, h_2, \dots, h_n , donde $x_j + h_j = v_j$. Aunque hay $2n$ variables, en cada iteración, solamente una variable de cada pareja x_j, h_j es explícita. Obsérvese que la cota v_j es al mismo tiempo cota para x_j y para h_j . Por notación, supondremos que siempre las n variables son t_1, t_2, \dots, t_n , donde t_j es x_j o h_j . Se denotará por $\text{compl}(t_j)$ la variable “complementaria” a t_j .

Así por ejemplo, en una iteración están las variables x_1, x_2, x_3, x_4 ; en otra iteración están x_1, h_2, x_3, x_4 ; en otra iteración están h_1, h_2, x_3, x_4 .

En el MSA, como en el simplex, hay variables básicas, variables libres, costos reducidos, variable que entra, variable que sale, pivoteo.

El manejo (y cálculo) de variables básicas, variables libres, costos reducidos, criterio de optimalidad y variable que entra es el mismo que se hace en el simplex.

Costos reducidos:

$$\begin{aligned}\tilde{c} &= c - A^T B^{-1} c_B \\ \tilde{c} &= c - A^T c_B \\ \tilde{c}_L &= c_L - L^T c_B \\ \tilde{c}_B &= 0\end{aligned}$$

Criterio de optimalidad: Si

$$\tilde{c}_L \geq 0,$$

entonces la solución factible básica actual es óptima.

Usualmente se escoge t_e la variable que entra por:

$$\tilde{c}_e = \min\{\tilde{c}_j : \tilde{c}_j < 0, t_j \text{ es libre}\}.$$

Después de haber escogido la variable que entra empiezan los cambios con respecto al simplex. En el simplex cuando la variable que entra, pasa de cero a un valor positivo, únicamente hay que controlar que no se vuelva

negativa ninguna de las variables básicas. Esto se presenta cuando $a_{ie} > 0$. Para esto se calcula

$$w_1 = \begin{cases} +\infty & \text{si } A.e \leq 0 \\ \frac{b_{\sigma_1}}{a_{\sigma_1 e}} = \min\left\{\frac{b_i}{a_{ie}} : a_{ie} > 0\right\} & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

En el MSA hay dos controles adicionales. Ninguna de las variables básicas puede sobrepasar la cota superior. Esto se presenta cuando $a_{ie} < 0$. Entonces se calcula

$$w_2 = \begin{cases} +\infty & \text{si } A.e \geq 0 \\ \frac{v_{\beta_{\sigma_2}} - b_{\sigma_2}}{-a_{\sigma_2 e}} = \min\left\{\frac{v_{\beta_i} - b_i}{-a_{ie}} : a_{ie} < 0\right\} & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

El tercer control, simplemente impide que la variable que entra sobrepase su propia cota superior.

$$w_3 = v_e.$$

De los tres controles, se escoge el más restrictivo:

$$\bar{w} = \min\{w_1, w_2, w_3\}.$$

Si $\bar{w} = +\infty$, el óptimo es no acotado. Se puede obtener una dirección a lo largo de la cual z disminuye indefinidamente.

Si $\bar{w} = w_1$ el tratamiento es exactamente el mismo del simplex. La variable t_e entra a la base, la variable $t_{\beta_{\sigma_1}}$ sale de la base, se pivotea toda la matriz aumentada sobre el elemento $a_{\sigma_1 e}$.

Si $\bar{w} = w_2$, entra a la base t_e y sale $\text{compl}(t_{\beta_{\sigma_2}})$:

- $b_{\sigma_2} \leftarrow v_{\beta_{\sigma_2}} - b_{\sigma_2}$
- $L_{\sigma_2 \cdot} = -L_{\sigma_2 \cdot}$. Se cambia el signo de todas las entradas de variables libres en la fila σ_2 de la matriz A .
- $t_{\beta_{\sigma_2}} \leftarrow \text{compl}(t_{\beta_{\sigma_2}})$, es decir, $x_{\beta_{\sigma_2}} \leftrightarrow h_{\beta_{\sigma_2}}$. Si se estaba trabajando con $x_{\beta_{\sigma_2}}$, ahora se trabajará con $h_{\beta_{\sigma_2}}$ y viceversa.
- Pivoteo sobre el elemento $a_{\sigma_2 e}$.

Si $\bar{w} = w_3$, se va a usar la variable $\text{compl}(t_e)$:

- $t_e \leftarrow \text{compl}(t_e)$
- $b \leftarrow b - v_e A_{\cdot e}$
- $A_{\cdot e} \leftarrow -A_{\cdot e}$
- $-z \leftarrow -z - \tilde{c}_e v_e$
- $\tilde{c}_e \leftarrow -\tilde{c}_e$

Ejemplo 1.3.

$$\begin{array}{llllllll}
 \min z = & -4x_1 - & 2x_2 - & 2x_3 + x_4 & & & & \\
 & 2x_1 + & x_2 - & 5x_3 + x_4 + & & & = 10 & \\
 & & x_1 + 1/2x_2 + 1/2x_3 & & + x_5 & & = 6 & \\
 & 3x_1 + & 2x_2 + & 4x_3 & & & + x_6 = 20 & \\
 & & & & & & x_1 \leq 4 & \\
 & & & & & & x_2 \leq 3 & \\
 & & & & & & x_3 \leq 2 & \\
 & & & & & & x_4 \leq 10 & \\
 & & & & & & x \geq 0. &
 \end{array}$$

Matriz aumentada:

$$\begin{array}{ccccccc|c}
 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & b \\
 \hline
 x_4 & 2 & 1 & -5 & 1 & 0 & 0 & 10 \\
 x_5 & 1 & 1/2 & 1/2 & 0 & 1 & 0 & 6 \\
 x_6 & 3 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 & 20 \\
 \hline
 -z & -4 & -2 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0
 \end{array}$$

Con costos reducidos:

$$\begin{array}{ccccccc|c}
 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & b \\
 \hline
 x_4 & 2 & 1 & -5 & 1 & 0 & 0 & 10 \\
 x_5 & 1 & 1/2 & 1/2 & 0 & 1 & 0 & 6 \\
 x_6 & 3 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 & 20 \\
 \hline
 -z & -6 & -3 & 3 & 0 & 0 & 0 & -10
 \end{array}$$

Iteración 1:

$$x_e = x_1$$

$$w_1 = \min\{5, 6, 20/3\} = 5$$

$$w_2 = +\infty$$

$$w_3 = 4$$

$$\bar{w} = w_3 = 4$$

$$b = \begin{bmatrix} 10 \\ 6 \\ 20 \end{bmatrix} - 4 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$-z = -10 - (-6)4 = 14$$

Nueva tabla:

	h_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
x_4	-2	1	-5	1	0	0	2
x_5	-1	1/2	1/2	0	1	0	2
x_6	-3	2	4	0	0	1	8
$-z$	6	-3	3	0	0	0	14

Iteración 2:

$$x_e = x_2$$

$$w_1 = \min\{2, 4, 4\} = 2$$

$$w_2 = +\infty$$

$$w_3 = 3$$

$$\bar{w} = w_1 = 2$$

$$x_{\beta_{\sigma_1}} = x_{\beta_1} = x_4 .$$

Pivoteo usual sobre el elemento a_{12} :

	h_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
x_2	-2	1	-5	1	0	0	2
x_5	0	0	3	-1/2	1	0	1
x_6	1	0	14	-2	0	1	4
$-z$	0	0	-12	3	0	0	20

Iteración 3:

$$\begin{aligned}
 x_e &= x_3 \\
 w_1 &= \min\{1/3, 2/7\} = 2/7 \\
 w_2 &= \min\left\{\frac{3-2}{-5}\right\} = 1/5 \\
 w_3 &= 2 \\
 \bar{w} &= w_2 = 1/5 \\
 x_{\beta_{\sigma_2}} &= x_{\beta_1} = x_2.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b_1 &= 3 - 2 = 1 \\
 L_1. &= -L_1. \\
 x_2 &\leftrightarrow h_2
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccccccc|c}
 & h_1 & h_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & b \\
 \hline
 h_2 & 2 & 1 & 5 & -1 & 0 & 0 & 1 \\
 x_5 & 0 & 0 & 3 & -1/2 & 1 & 0 & 1 \\
 x_6 & 1 & 0 & 14 & -2 & 0 & 1 & 4 \\
 \hline
 -z & 0 & 0 & -12 & 3 & 0 & 0 & 20
 \end{array}$$

Pivoteo sobre el elemento a_{13} :

$$\begin{array}{ccccccc|c}
 & h_1 & h_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & b \\
 \hline
 x_3 & 2/5 & 1/5 & 1 & -1/5 & 0 & 0 & 1/5 \\
 x_5 & -6/5 & -3/5 & 0 & 1/10 & 1 & 0 & 2/5 \\
 x_6 & -23/5 & -14/5 & 0 & 4/5 & 0 & 1 & 6/5 \\
 \hline
 -z & 24/5 & 12/5 & 0 & 3/5 & 0 & 0 & 112/5
 \end{array}$$

La tabla es óptima,

$$\begin{aligned}
 h_1 &= 0, & h_2 &= 0, & x_3 &= 1/5, & x_4 &= 0, & x_5 &= 2/5, & x_6 &= 6/5, & z &= -112/5, \\
 x_1 &= 4, & x_2 &= 3, & x_3 &= 1/5, & x_4 &= 0, & x_5 &= 2/5, & x_6 &= 6/5, & z &= -112/5. \quad \diamond
 \end{aligned}$$

1.1.2. Dos fases

En un problema de OL donde, fuera de las restricciones de caja, hay desigualdades, es necesario introducir variables de holgura para llevarlo a la

forma estándar. Fácilmente se obtiene que $b \geq 0$. Si no se tienen las condiciones $A(:, \beta) = I_m$ y $b \leq v_B$, entonces es necesario introducir variables artificiales y empezar con la primera fase como en un problema usual de OL.

Tanto las variables de holgura como las artificiales tendrán cota inferior nula y cota superior igual a $+\infty$.

Al empezar la primera fase, salvo casos muy especiales, para todas las variables $t_j = x_j$. Supongamos que al acabar la primera fase, se obtuvo un punto factible. Al empezar la segunda fase, para algunas variables originales puede suceder que $t_j = h_j$. Dado que $h_j = v_j - x_j$, entonces es necesario tener en cuenta que el costo de h_j es el inverso aditivo del costo de x_j :

$$c(h_j) = -c(x_j).$$

Además por cada una de estas variables es necesario modificar z de la siguiente manera:

$$-z \leftarrow -z + v_j c(h_j).$$

Ejemplo 1.4.

$$\begin{aligned} \min \quad & \zeta = 10\xi_1 + 3\xi_2 \\ & \xi_1 + 2\xi_2 \geq 4 \\ & 5\xi_1 + 2\xi_2 \geq 12 \\ & 0 \leq \xi_1 \leq 3/2 \\ & 1 \leq \xi_2 \leq 4 \end{aligned}$$

Cambio de variable para obtener cotas inferiores nulas: $x_1 = \xi_1$,

$$x_2 = \xi_2 - 1.$$

$$\begin{aligned} \min \quad & z = 10x_1 + 3x_2 \\ & x_1 + 2x_2 \geq 2 \\ & 5x_1 + 2x_2 \geq 10 \\ & x_1 \leq 3/2 \\ & x_2 \leq 3 \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

Variables de holgura:

$$\begin{aligned} \min \quad & z = 10x_1 + 3x_2 \\ & x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ & 5x_1 + 2x_2 - x_4 = 10 \\ & x_1 \leq 3/2 \\ & x_2 \leq 3 \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

Primera fase con variables de artificiales:

$$\begin{array}{lllllll}
 \min z_a = & & & & x_5 + x_6 & & \\
 & x_1 + 2x_2 - x_3 & & + x_5 & = & 2 \\
 & 5x_1 + 2x_2 & - x_4 & + x_6 & = & 10 \\
 & & & & x_1 \leq 3/2 & & \\
 & & & & x_2 \leq & 3 & \\
 & & & & x \geq & 0 &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc|c}
 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & b \\
 \begin{array}{c} x_5 \\ x_6 \end{array} & \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array} & & & & & & 2 \\
 & \hline & \begin{array}{cccccc} 5 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array} & & & & & 10 \\
 & \begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} & & & & & & 0
 \end{array}$$

Cálculo de costos reducidos:

$$\begin{array}{ccccccc|c}
 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & b \\
 \begin{array}{c} x_5 \\ x_6 \end{array} & \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array} & & & & & & 2 \\
 & \hline & \begin{array}{cccccc} 5 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array} & & & & & 10 \\
 -z & \begin{array}{cccccc} -6 & -4 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} & & & & & & -12
 \end{array}$$

Iteración 1:

$$\begin{aligned}
 x_e &= x_1 \\
 w_1 &= \min\{2, 2\} = 2 \\
 w_2 &= +\infty \\
 w_3 &= 3/2 \\
 \bar{w} &= w_3 = 3/2
 \end{aligned}$$

Cambios en la tabla:

$$\begin{array}{ccccccc|c}
 & h_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & b \\
 \begin{array}{c} x_5 \\ x_6 \end{array} & \begin{array}{cccccc} -1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array} & & & & & & 1/2 \\
 & \hline & \begin{array}{cccccc} -5 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array} & & & & & 5/2 \\
 -z & \begin{array}{cccccc} 6 & -4 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} & & & & & & -3
 \end{array}$$

Iteración 2:

$$\begin{aligned}
x_e &= x_2 \\
w_1 &= \min\{1/4, 5/4\} = 1/4 \\
w_2 &= +\infty \\
w_3 &= 3 \\
\bar{w} &= w_1 = 1/4 \\
x_{\beta_{\sigma_1}} &= x_{\beta_1} = x_5.
\end{aligned}$$

Pivoteo usual sobre el elemento a_{12} :

$$\begin{array}{c|ccccc|c}
& h_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_6 & b \\
\hline
x_2 & -1/2 & 1 & -1/2 & 0 & 0 & 1/4 \\
x_6 & -4 & 0 & 1 & -1 & 1 & 2 \\
-z & 4 & 0 & -1 & 1 & 0 & -2
\end{array}$$

Iteración 3:

$$\begin{aligned}
x_e &= x_3 \\
w_1 &= \min\{2\} = 2 \\
w_2 &= \min\left\{\frac{3 - 1/4}{1/2}\right\} = 11/2 \\
w_3 &= \infty \\
\bar{w} &= w_1 = 2 \\
x_{\beta_{\sigma_1}} &= x_{\beta_2} = x_6.
\end{aligned}$$

Pivoteo usual sobre el elemento a_{23} :

$$\begin{array}{c|ccccc|c}
& h_1 & x_2 & x_3 & x_4 & & b \\
\hline
x_2 & -5/2 & 1 & 0 & -1/2 & & 5/4 \\
x_3 & -4 & 0 & 1 & -1 & & 2 \\
-z & 0 & 0 & 0 & 0 & & 0
\end{array}$$

Fin de la primera fase con la obtención de un punto factible. Ahora se construye la matriz aumentada con los costos originales.

$$\begin{array}{c|ccccc|c}
& h_1 & x_2 & x_3 & x_4 & & b \\
\hline
x_2 & -5/2 & 1 & 0 & -1/2 & & 5/4 \\
x_3 & -4 & 0 & 1 & -1 & & 2 \\
-z & 10 & 3 & 0 & 0 & & 0
\end{array}$$

Modificación de la matriz por las variables h_j . Cambio de signo del primer costo: $c(h_1) = -10$. Además

$$-z \leftarrow 0 + (3/2)(-10) = -15$$

$$\begin{array}{c|cccc|c} & h_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \\ \hline x_2 & -5/2 & 1 & 0 & -1/2 & 5/4 \\ x_3 & -4 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ \hline -10 & 3 & 0 & 0 & 0 & -15 \end{array}$$

Cálculo de costos reducidos:

$$\begin{array}{c|cccc|c} & h_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \\ \hline x_2 & -5/2 & 1 & 0 & -1/2 & 5/4 \\ x_3 & -4 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ \hline -z & -5/2 & 0 & 0 & 3/2 & -75/4 \end{array}$$

Iteración 4:

$$x_e = h_1$$

$$w_1 = \infty$$

$$w_2 = \min\left\{\frac{3 - 5/4}{5/2}, \infty\right\} = 7/10$$

$$w_3 = 3/2$$

$$\bar{w} = w_2 = 7/10$$

$$x_{\beta_{\sigma_2}} = x_{\beta_1} = x_2.$$

La variable básica x_2 llega a su cota superior: $b_1 \leftarrow 3 - 5/4 = 7/4$, $L_1 \leftarrow -L_1.$, $x_2 \leftrightarrow h_2$,

$$\begin{array}{c|cccc|c} & h_1 & h_2 & x_3 & x_4 & b \\ \hline h_2 & 5/2 & 1 & 0 & 1/2 & 7/4 \\ x_3 & -4 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ \hline -z & -5/2 & 0 & 0 & 3/2 & -75/4 \end{array}$$

Pivoteo sobre el elemento a_{11} :

	h_1	h_2	x_3	x_4	b
h_1	1	$2/5$	0	$1/5$	$7/10$
x_3	0	$8/5$	1	$-1/5$	$24/5$
$-z$	0	1	0	2	-17

La tabla es óptima.

$$\begin{aligned}
 h_1 &= 7/10, & h_2 &= 0, & x_3 &= 24/5, & x_4 &= 0, & z &= 17, \\
 x_1 &= 4/5, & x_2 &= 3, & x_3 &= 24/5, & x_4 &= 0, & z &= 17, \\
 \xi_1 &= 4/5, & \xi_2 &= 4, & & & & & \zeta = 20. \quad \diamond
 \end{aligned}$$

1.2. Método de descomposición de Dantzig y Wolfe

Este método, MD, sirve para resolver eficientemente problemas de OL que se pueden plantear en la forma

$$\begin{aligned}
 \min \quad & z = c^T x \\
 & Ax = b \\
 & x \in X,
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

donde el conjunto X está definido por desigualdades, igualdades lineales (o afines) y variables no negativas de tal forma que para cualquier vector $d \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, **se puede resolver fácilmente** el siguiente problema de OL:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & d^T x \\
 & x \in X.
 \end{aligned} \tag{1.2}$$

El ejemplo usual se tiene cuando X se define por medio de una matriz diagonal por bloques y por restricciones de no negatividad:

$$X = \{x : \mathbb{A}x = \mathbf{b}, x \geq 0\},$$

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} \mathbb{A}^1 & & & \\ & \mathbb{A}^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbb{A}^p \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}^1 \\ \mathbf{b}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{b}^p \end{bmatrix},$$

es decir, \mathbb{A} es una matriz diagonal por bloques, pero estos bloques diagonales no son necesariamente cuadrados. Obviamente debe haber concordancia entre el número de filas de \mathbb{A}^j y el de \mathbf{b}^j . Las restricciones $Ax = b$ se llaman *restricciones de acople*.

Aquí, por facilidad, se supuso que las restricciones son todas igualdades, pero, sin ninguna pérdida de generalidad, **también puede haber, indistintamente, desigualdades e igualdades**.

Si el vector de incógnitas también se descompone por bloques de acuerdo al número de columnas de cada matriz \mathbb{A}^j ,

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^1 \\ \mathbf{x}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{x}^p \end{bmatrix},$$

entonces $\mathbb{A}x = \mathbf{b}$, $x \geq 0$, se separa en p bloques

$$\begin{aligned} \mathbb{A}^j \mathbf{x}^j &= \mathbf{b}^j, \quad j = 1, \dots, p, \\ \mathbf{x}^j &\geq 0. \end{aligned}$$

En estas condiciones el problema de OL (1.2) se llama *separable* y, se dice que el conjunto X es “separable”.

Resolver (1.2) equivale a resolver p problemas pequeños:

$$\begin{aligned} \min \quad & d^{j^T} \mathbf{x}^j \\ \text{s. t.} \quad & \mathbb{A}^j \mathbf{x}^j = \mathbf{b}^j, \\ & \mathbf{x}^j \geq 0. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Si se define

$$X^j = \{ \mathbf{x}^j : \mathbb{A}^j \mathbf{x}^j = \mathbf{b}^j, \mathbf{x}^j \geq 0 \},$$

entonces

$$X = X^1 \times X^2 \times \cdots \times X^p$$

y (1.3) se puede escribir

$$\begin{aligned} \min \quad & d^j \mathbf{r}^j \\ \mathbf{r}^j \in & X^j. \end{aligned}$$

Ejemplo 1.5. Problema de producción y almacenamiento. Una compañía fabrica 2 productos no perecederos diferentes. El gerente desea planificar la política de producción y almacenamiento para los 4 trimestres del año. Las restricciones para la producción son la capacidad de trabajo y la capacidad de almacenamiento de cada trimestre. Sean

- d_{ij} = la previsión de demanda del producto i en el periodo j . Estas previsiones de demanda deben ser satisfechas al final de cada trimestre. La producción sobrante puede ser almacenada para el periodo siguiente.
- t_i = número de horas de trabajo requeridas para elaborar una unidad del producto i .
- c_{ij} = costo de una hora de trabajo dedicada al producto i en el periodo j .
- w_j = número de horas de trabajo disponibles en el trimestre j .
- v_i = volumen, en m^3 , de cada unidad del producto i .
- u_{ij} = costo de almacenamiento de una unidad del producto i durante el trimestre j o durante parte de él.
- a_j = capacidad de almacenamiento, en m^3 , en el trimestre j .

Las variables de cada periodo, correspondientes a las actividades de cada periodo, pueden ser:

- x_{ij} = número de unidades del producto i elaboradas en el trimestre j .
- y_{ij} = número de unidades del producto i almacenadas al final del periodo j para ser utilizadas a partir del periodo $j + 1$.

Para el periodo j se tiene:

$$\min \quad c_{1j}t_1x_{1j} + c_{2j}t_2x_{2j} + u_{1j}y_{1j} + u_{2j}y_{2j}$$

$$\begin{aligned}
 t_1 x_{1j} + t_2 x_{2j} + h_{wj} &= w_j \\
 v_1 y_{1j} + v_2 y_{2j} + h_{aj} &= a_j \\
 y_{1,j-1} + x_{1j} - y_{1j} &= d_{1j} \\
 y_{2,j-1} + x_{2j} - y_{2j} &= d_{2j},
 \end{aligned}$$

donde h_{wj} es la holgura con respecto a la capacidad de trabajo en el periodo j , es decir, la capacidad de trabajo no utilizada en el periodo j . De manera análoga, h_{aj} es la capacidad de almacenamiento no utilizada en el periodo j .

La porción de la matriz de restricciones, correspondiente a las restricciones del periodo j , tiene el siguiente esquema:

$y_{1,j-1}$	$y_{2,j-1}$	x_{1j}	x_{2j}	y_{1j}	y_{2j}	h_{wj}	h_{aj}	
		t_1	t_2			1		$= w_j$
				v_1	v_2		1	$= a_j$
1			1		-1			$= d_{1j}$
	1			1	-1			$= d_{2j}$
		$c_{1j} t_1$	$c_{2j} t_2$	u_{1j}	u_{2j}			

Suponiendo que fueran 5 periodos, la matriz general de restricciones presenta el siguiente aspecto:

La matriz tiene una diagonal de bloques y bloques subdiagonales. Los bloques diagonales corresponden a las variables del periodo j ; los bloques subdiagonales están relacionados con actividades del periodo anterior. Frequentemente se dice que esta matriz tiene forma de *escalera*.

Consideremos el siguiente reordenamiento: primero todas las restricciones relacionadas con las previsiones de demanda; enseguida las restricciones, periodo por periodo, relacionadas con la capacidad de trabajo o con

la capacidad de almacenamiento. La matriz de restricciones tendrá el siguiente aspecto:

De una matriz con este aspecto se dice que tiene *forma angular*. Este tipo de matriz permite la aplicación de manera eficiente del método de descomposición. Las primeras restricciones, las que tienen que ver con demandas, y que involucran variables de más de un periodo, corresponden a $Ax = b$. Las otras restricciones permiten definir el conjunto X .

Este tipo de matrices es típico de problemas o modelos dinámicos donde hay asignación de recursos en el tiempo. Un ejemplo importante es el modelo dinámico de Leontief. Ver [Las70].

1.2.1. Conjunto acotado

Supongamos inicialmente que el conjunto $X \neq \emptyset$ es acotado. Como se había dicho antes X está definido por igualdades, desigualdades y variables no negativas. En estas condiciones, X tiene puntos extremos y se puede expresar como combinación convexa de ellos. Sean x^1, x^2, \dots, x^s los puntos extremos de X ,

$$X = \left\{ \sum_1^s \lambda_i x^i : \lambda_i \geq 0, \sum_1^s \lambda_i = 1 \right\}.$$

Así el problema (1.1) se puede reescribir

$$\min z = \sum_1^s c^T x^j \lambda_j$$

$$\begin{aligned} \sum_1^s Ax^j \lambda_j &= b \\ \sum_1^s \lambda_j &= 1 \\ \lambda &\geq 0 \end{aligned}$$

y de manera más compacta

$$\begin{aligned} \min \ z &= f^T \lambda \\ D\lambda &= g \\ \lambda &\geq 0, \end{aligned} \tag{1.4}$$

donde

$$\begin{aligned} f_j &= c^T x^j, \quad j = 1, \dots, s, \\ f &= \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_s \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{s \times 1} \\ D &= \begin{bmatrix} Ax^1 & Ax^2 & \cdots & Ax^s \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(m+1) \times s} \\ g &= \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(m+1) \times 1}. \end{aligned}$$

El MD utiliza el método simplex revisado para el problema (1.4). La matriz de trabajo del MSR tiene la forma

$$\begin{bmatrix} D_B^{-1} & g^k & D_{\cdot e}^k \\ \pi^T & -z & \tilde{f}_e \end{bmatrix}$$

donde

$$\begin{aligned}
 D_{\cdot e}^k &= D_B^{-1} D_{\cdot e} \\
 \pi^T &= -f_B^T D_B^{-1} \\
 \pi^T &= [\pi_1 \ \pi_2 \ \cdots \ \pi_m \ \pi_{m+1}] \\
 \pi^T &= [\bar{\pi}^T \ \pi_{m+1}] \\
 \bar{\pi}^T &= [\pi_1 \ \pi_2 \ \cdots \ \pi_m] \\
 -z &= -f_B^T D_B^{-1} g^0.
 \end{aligned}$$

El valor $-z$ se puede obtener de dos maneras

$$\begin{aligned}
 -z &= \pi^T g^0 \\
 -z &= -f_B^T g^k
 \end{aligned}$$

Los costos reducidos para el problema (1.4) se calculan por la fórmula

$$\tilde{f}^T = \pi^T D + f^T.$$

En particular

$$\begin{aligned}
 \tilde{f}_B^T &= 0, \\
 \tilde{f}_L^T &= \pi^T D_L + f_L^T.
 \end{aligned}$$

Para saber si el punto actual es óptimo se busca el menor costo reducido,

$$\tilde{f}_e = \min_{1 \leq j \leq s} \tilde{f}_j.$$

Como $\tilde{f}_B = 0$

$$\tilde{f}_e \leq 0.$$

Si $\tilde{f}_e = 0$, entonces la solución actual es óptima. Sino, la variable λ_e entra a la base. El cálculo explícito de cada uno de los costos reducidos da:

$$\tilde{f}_j = c^T x^j + [\bar{\pi}^T \ \pi_{m+1}] \begin{bmatrix} Ax^j \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{f}_j = (c^T + \bar{\pi}^T A) x^j + \pi_{m+1}.$$

Obtener directamente $\tilde{f}_e = \min\{\tilde{f}_j\}$ es muy dispendioso, pues requiere conocer explícitamente todos los puntos extremos de X y s puede ser muy grande. Sin embargo, \tilde{f}_e se puede obtener de otra manera. Sea

$$\gamma^T = c^T + \bar{\pi}^T A.$$

Consideremos φ el valor óptimo del problema

$$\begin{aligned} \min \quad & \gamma^T x + \pi_{m+1} \\ x \in & X. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Como (1.5) es un problema de OL, si tiene óptimo finito, éste se obtiene siempre en un punto extremo. Luego $\tilde{f}_e = \varphi$. Esto quiere decir que \tilde{f}_e se puede obtener mediante la solución de (1.5) y, se ha supuesto, que este problema se puede resolver fácilmente.

ALGORITMO DE DESCOMPOSICIÓN

1. Encontrar una solución básica inicial de (1.4).
2. Obtener la matriz del MSR calculando D_B^{-1} , g^k , $-z$, π^T .

Obtener \tilde{f}_e , costo mínimo reducido de las variables de holgura libres.

Si $\tilde{f}_e < 0$, entrar esta variable de holgura libre a la base y completar la iteración.

3. Calcular $\gamma^T = c^T + \bar{\pi}^T A$.
4. Hallar $\bar{\varphi} = \min\{\gamma^T x : x \in X\}$ y x^e punto óptimo.
5. $\tilde{f}_e = \bar{\varphi} + \pi_{m+1}$
6. Si $\tilde{f}_e = 0$, la solución es óptima. Parar.
7. La variable λ_e entra a la base. Calcular

$$D_{\cdot e}^k = D_B^{-1} \begin{bmatrix} Ax^e \\ 1 \end{bmatrix}.$$

8. Escoger la variable básica que sale y pivotear.
9. Ir al paso 3.

En el algoritmo anterior hay pasos que es necesario aclarar poco a poco:

- la introducción de variables de holgura cuando, en las restricciones de acople, hay desigualdades.
- la obtención de una solución básica inicial.
- la introducción de variables artificiales.
- cálculo de los costos reducidos de las variables de holgura libres.
- escogencia de la variable que entra cuando también hay variables de holgura libres.

A lo largo de la descripción detallada del método se utilizarán los siguientes resultados:

- *El conjunto $X = X^1 \times X^2 \times \cdots \times X^p$ es acotado sssi cada conjunto X^j es acotado.*
- *El punto $x = (x^1, \dots, x^p)$ es punto extremo de X sssi cada punto x^j es punto extremo de X^j .*
- *El conjunto X es vacío sssi algún conjunto X_j es vacío.*

En las restricciones de acople las variables de holgura se introducen como en cualquier problema de OL. Supongamos que las variables $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n_2}$ son las variables de holgura para las restricciones de acople. El problema depende ahora de

$$y^T = [\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \cdots \quad \lambda_s \quad x_{n+1} \quad \cdots \quad x_{n_2}]$$

y el problema (1.4) se reescribe

$$\begin{aligned} \min \quad & z = f^T y \\ \text{subject to} \quad & D y = g \\ & y \geq 0. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Aquí hay una ambigüedad en la notación que no perjudica la presentación del algoritmo y que el lector benevolente no objetará. La matriz D de (1.4) corresponde únicamente a variables λ_j . La matriz D de (1.6) corresponde a variables λ_j y a variables de holgura. La misma observación es válida para f .

Para una variable λ_j ,

$$f_j = c^T x^j,$$

$$D_{\cdot j} = \begin{bmatrix} Ax^j \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Para una **variable de holgura por defecto**,

$$f_j = 0,$$

$$D_{\cdot j} = \begin{bmatrix} e^\rho \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

donde $e^\rho \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ y ρ indica la restricción para la cual fue introducida esa variable de holgura. Para una **variable de holgura por exceso**,

$$f_j = 0,$$

$$D_{\cdot j} = \begin{bmatrix} -e^\rho \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ -1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Para las variables λ_j , el menor costo reducido se obtiene, como está expresado en el algoritmo, por medio de

$$\tilde{f}_e = \bar{\varphi} + \pi_{m+1}.$$

Como se está utilizando el simplex revisado, el costo reducido para una variable de holgura por defecto se obtiene por

$$\tilde{f}_j = \begin{bmatrix} \bar{\pi}^T & \pi_{m+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^\rho \\ 0 \end{bmatrix} + 0 = \pi_\rho .$$

De manera análoga, para una variable de holgura por exceso

$$\tilde{f}_j = -\pi_\rho .$$

Ejemplo 1.6.

$$\begin{aligned} \min z &= -10x_1 - 8x_2 - 2x_3 - 5x_4 \\ x_1 + x_3 &\leq 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &\leq 4 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 5 \\ x_3 + 2x_4 &\leq 8 \\ 3x_3 + 2x_4 &\leq 18 \\ x &\geq 0. \end{aligned}$$

Las dos primeras restricciones son las de acople. Las tres siguientes y las de no negatividad definen el conjunto X . Es claro que es fácil resolver un problema de OL en X , pues resulta un problema separable. X se puede definir por medio de dos bloques, el primero con una restricción y dos variables no negativas x_1 y x_2 , el segundo con dos restricciones y dos variables no negativas x_3 y x_4 .

Es necesario introducir dos variables de holgura, x_5 y x_6 , para las restricciones de acople.

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 + x_5 &= 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_6 &= 4 \end{aligned}$$

La matriz D tendrá tres filas. Entonces, para empezar, se requieren tres variables básicas. Pueden ser x_5 , x_6 y λ_1 , correspondiente a un punto extremo de X . Este puede ser

$$x^1 = (0, 0, 0, 0).$$

La columna de D correspondiente a x_5 es simplemente

$$D_{.5} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La correspondiente a x_6 es

$$D_{.6} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La columna correspondiente a λ_1 es

$$D_{.1} = \begin{bmatrix} Ax^1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$D_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Como x_5 y x_6 son variables de holgura, su costo f_j es 0. Para λ_1

$$f_1 = c^T x^1 = [-10 \quad -8 \quad -2 \quad -5] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0.$$

$$\begin{aligned} \pi^T &= -f_B^T D_B^{-1} = -[0 \quad 0 \quad 0] D_B^{-1} \\ \pi^T &= [0 \quad 0 \quad 0] \\ -z &= \pi^T g^0 = [0 \quad 0 \quad 0] g^0 \\ -z &= 0. \end{aligned}$$

La tabla o matriz R del simplex revisado para el método de descomposición es:

$$\begin{array}{c|cccc} & x_5 & x_6 & \lambda_1 & -z \\ \hline x_5 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ x_6 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ \lambda_1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -z & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Iteración 1:

El punto actual es simplemente $x = \lambda_1 x^1 = 1x^1 = (0, 0, 0, 0)$. Como no hay variables de holgura libres, se procede a resolver un problema de OL en X :

$$\begin{aligned}\gamma^T &= c^T + \bar{\pi}^T A \\ &= [-10 \ -8 \ -2 \ -5] + [0 \ 0] A \\ \gamma^T &= [-10 \ -8 \ -2 \ -5].\end{aligned}$$

Al minimizar $\gamma^T x$ con $x \in X$, se obtiene

$$\begin{aligned}x^2 &= x^* = (0, 5, 0, 4), \\ \bar{\varphi} &= -60, \\ \tilde{f}_e &= \bar{\varphi} + \pi_{m+1} \\ &= -60 + 0 = -60.\end{aligned}$$

Se deduce que el punto actual no es óptimo y que λ_2 entra a la base.

$$\begin{aligned}D_{.2} &= \begin{bmatrix} Ax^2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 9 \\ 1 \end{bmatrix} \\ D_B^{-1} D_{.2} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 9 \\ 1 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Ahora hay que agregar, a la tabla del simplex revisado, la columna $D_B^{-1} D_{.2}$ y el valor \tilde{f}_e .

$$\begin{array}{c|ccccc} x_5 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ x_6 & 0 & 1 & 0 & 4 & 9 \\ \lambda_1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -z & 0 & 0 & 0 & 0 & -60 \end{array}$$

Para escoger la variable que sale es necesario considerar los cocientes $4/9$ y $1/1$. La variable básica que sale es la segunda, o sea, x_6 . Ahora se pivotea sobre el elemento R_{25} .

$$\begin{array}{l} x_5 \\ \lambda_2 \\ \lambda_1 \\ -z \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1/9 & 0 & 4/9 \\ 0 & -1/9 & 1 & 5/9 \\ 0 & 20/3 & 0 & 80/3 \end{bmatrix}$$

Iteración 2:

El punto actual es $x = \lambda_1 x^1 + \lambda_2 x^2 = \begin{bmatrix} 5/9 & 4/9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \end{bmatrix} = (0, 20/9, 0, 16/9)$. La variable de holgura x_6 es libre y $f(x_6) = \pi_2 = 20/3 \geq 0$. Se procede a resolver un problema de OL en X :

$$\begin{aligned} \gamma^T &= c^T + \bar{\pi}^T A \\ &= [-10 \quad -8 \quad -2 \quad -5] + [0 \quad 20/3] A \\ \gamma^T &= [-10/3 \quad -4/3 \quad 14/3 \quad 5/3]. \end{aligned}$$

Al minimizar $\gamma^T x$ con $x \in X$, se obtiene

$$\begin{aligned} x^3 &= x^* = (5/2, 0, 0, 0), \\ \bar{\varphi} &= -25/3, \\ \tilde{f}_e &= \bar{\varphi} + \pi_{m+1} \\ &= -25/3 + 0 = -25/3. \end{aligned}$$

Se deduce que el punto actual no es óptimo y que λ_3 entra a la base.

$$\begin{aligned} D_{.3} &= \begin{bmatrix} Ax^3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/2 \\ 5/2 \\ 1 \end{bmatrix} \\ D_B^{-1} D_{.3} &= \begin{bmatrix} 5/2 \\ 5/18 \\ 13/18 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ahora hay que agregar, a la tabla del simplex revisado, la columna $D_B^{-1} D_{.3}$ y el valor \tilde{f}_e .

$$\begin{array}{l} x_5 \\ \lambda_2 \\ \lambda_1 \\ -z \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 5/2 \\ 0 & 1/9 & 0 & 4/9 & 5/18 \\ 0 & -1/9 & 1 & 5/9 & 13/18 \\ 0 & 20/3 & 0 & 80/3 & -25/3 \end{bmatrix}$$

Para escoger la variable que sale es necesario considerar los cocientes $3/(5/2) = 6/5$, $(4/9)/(5/18) = 8/5$ y $(5/9)/(13/18) = 10/13$. La variable básica que sale es la tercera, o sea, λ_1 . Ahora se pivotea sobre el elemento R_{35} .

$$\begin{array}{l} x_5 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ -z \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 5/13 & -45/13 & 14/13 \\ 0 & 2/13 & -5/13 & 3/13 \\ 0 & -2/13 & 18/13 & 10/13 \\ 0 & 70/13 & 150/13 & 430/13 \end{bmatrix}$$

Iteración 3:

El punto actual es $x = (3/13)x^2 + (10/13)x^3 = (25/13, 15/13, 0, 12/13)$. La variable de holgura x_6 es libre y $\tilde{f}(x_6) = \pi_2 = 70/13 \geq 0$. Se procede a resolver un problema de OL en X :

$$\begin{aligned} \gamma^T &= c^T + \bar{\pi}^T A \\ &= [-10 \quad -8 \quad -2 \quad -5] + [0 \quad 70/13] A \\ \gamma^T &= [-60/13 \quad -34/13 \quad 44/13 \quad 5/13]. \end{aligned}$$

Al minimizar $\gamma^T x$ con $x \in X$, se obtiene

$$\begin{aligned} x^4 &= x^* = (0, 5, 0, 0), \\ \bar{\varphi} &= -170/13, \\ \tilde{f}_e &= \bar{\varphi} + \pi_{m+1} \\ &= -170/13 + 150/13 = -20/13. \end{aligned}$$

Se deduce que el punto actual no es óptimo y que λ_4 entra a la base.

$$\begin{aligned} D_{.4} &= \begin{bmatrix} Ax^4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} \\ D_B^{-1}D_{.4} &= \begin{bmatrix} -20/13 \\ 5/13 \\ 8/13 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ahora hay que agregar, a la tabla del simplex revisado, la columna $D_B^{-1}D_{.4}$ y el valor \tilde{f}_e .

$$\begin{array}{c} x_5 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ -z \end{array} \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 5/13 & -45/13 & 14/13 & -20/13 \\ 0 & 2/13 & -5/13 & 3/13 & 5/13 \\ 0 & -2/13 & 18/13 & 10/13 & 8/13 \\ 0 & 70/13 & 150/13 & 430/13 & -20/13 \end{array} \right]$$

Para escoger la variable que sale es necesario considerar los cocientes $(3/13)/(5/13) = 3/5$ y $(10/13)/(8/13) = 5/4$. La variable básica que sale es la segunda, o sea, λ_2 . Ahora se pivoteara sobre el elemento R_{25} .

$$\begin{array}{c} x_5 \\ \lambda_4 \\ \lambda_3 \\ -z \end{array} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 1 & -5 & 2 \\ 0 & 2/5 & -1 & 3/5 \\ 0 & -2/5 & 2 & 2/5 \\ 0 & 6 & 10 & 34 \end{array} \right]$$

Iteración 4:

El punto actual es $x = (2/5)x^3 + (3/5)x^4 = (1, 3, 0, 0)$. La variable de holgura x_6 es libre y $\tilde{f}(x_6) = \pi_2 = 6 \geq 0$. Se procede a resolver un problema de OL en X :

$$\begin{aligned} \gamma^T &= c^T + \bar{\pi}^T A \\ &= [-10 \quad -8 \quad -2 \quad -5] + [0 \quad 6] A \\ \gamma^T &= [-4 \quad -2 \quad 4 \quad 1]. \end{aligned}$$

Al minimizar $\gamma^T x$ con $x \in X$, se obtiene

$$\begin{aligned} x^5 &= x^* = (5/2, 0, 0, 0), \\ \bar{\varphi} &= -10, \\ \tilde{f}_e &= \bar{\varphi} + \pi_{m+1} \\ &= -10 + 10 = 0. \end{aligned}$$

Se deduce que el punto actual, $x = (1, 3, 0, 0)$, es óptimo y $z^* = -34$. Al remplazar este punto en las dos restricciones de acople, se obtiene que la primera holgura es 2, lo cual coincide con $x_5 = 2$; en la segunda restricción la holgura es nula, concordando con $x_6 = 0$. \diamond

Ejemplo 1.7. Para resolver el mismo problema del ejemplo anterior, se puede empezar directamente con variables artificiales. Para este caso las columnas de las variables de holgura x_5 y x_6 sirven para conformar la matriz I_3 . Se requiere una tercera columna, o sea, una variable artificial: x_7 . En la primera fase se debe minimizar la suma de las variables artificiales. En este caso,

$$\min z_a = x_7$$

$$D_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Como x_5 y x_6 son variables de holgura, su costo f_j es 0. Para x_7 , el costo es $f_7 = 1$.

Para λ_1

$$\begin{aligned} \pi^T &= -f_B^T D_B^{-1} = -[0 \ 0 \ 1] D_B^{-1} \\ \pi^T &= [0 \ 0 \ -1] \\ -z_a &= [0 \ 0 \ -1] g^0 \\ -z_a &= -1. \end{aligned}$$

La tabla o matriz R del simplex revisado para el método de descomposición es:

$$\begin{array}{c|cccc} & x_5 & x_6 & x_7 & -z_a \\ \hline & 1 & 0 & 0 & 3 \\ & 0 & 1 & 0 & 4 \\ & 0 & 0 & 1 & 1 \\ & 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}$$

Iteración 1:

Como no hay variables de holgura libres, se procede a resolver un problema de OL en X :

$$\begin{aligned} \gamma^T &= c^T + \bar{\pi}^T A \\ &= [0 \ 0 \ 0 \ 0] + [0 \ 0] A \end{aligned}$$

$$\gamma^T = [0 \ 0 \ 0 \ 0].$$

Al minimizar $\gamma^T x$ con $x \in X$, se obtiene

$$\begin{aligned} x^1 &= x^* = (0, 0, 0, 0), \\ \bar{\varphi} &= 0, \\ \tilde{f}_e &= \bar{\varphi} + \pi_{m+1} \\ &= 0 + -1 = -1. \end{aligned}$$

Este último problema de OL tiene muchas soluciones (cualquier punto factible). Se deduce que la tabla no es óptima y que λ_1 entra a la base.

$$\begin{aligned} D_{.1} &= \begin{bmatrix} Ax^1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ D_B^{-1} D_{.1} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ahora hay que agregar, a la tabla del simplex revisado, la columna $D_B^{-1} D_{.1}$ y el valor \tilde{f}_e .

$$\begin{array}{rccccc} & x_5 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ & x_6 & 0 & 1 & 0 & 4 & 0 \\ & x_7 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ & -z_a & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{array}$$

La variable que sale es necesariamente x_7 . Ahora se pivotea sobre el elemento R_{35} .

$$\begin{array}{rccccc} & x_5 & 1 & 0 & 0 & 3 & \\ & x_6 & 0 & 1 & 0 & 4 & \\ & \lambda_1 & 0 & 0 & 1 & 1 & \\ & -z_a & 0 & 0 & 0 & 0 & \end{array}$$

Iteración 2:

El punto actual es $x = \lambda_1 x^1 = (0, 0, 0, 0)$. No hay variables de holgura libres. Se procede a resolver un problema de OL en X :

$$\begin{aligned}
\gamma^T &= c^T + \bar{\pi}^T A \\
&= [0 \ 0 \ 0 \ 0] + [0 \ 0] A \\
\gamma^T &= [0 \ 0 \ 0 \ 0].
\end{aligned}$$

Al minimizar $\gamma^T x$ con $x \in X$, se obtiene

$$\begin{aligned}
x^2 &= x^* = (0, 0, 0, 0), \\
\bar{\varphi} &= 0, \\
\tilde{f}_e &= \bar{\varphi} + \pi_{m+1} \\
&= 0 + 0 = 0.
\end{aligned}$$

Se deduce la tabla actual es óptima para la primera fase. Como $z_a = 0$, se prosigue con la segunda fase. Al pasar a la segunda fase cambian los costos y es necesario recalcular f_B , π^T y $-z$. La segunda fase ya se realizó en el ejemplo anterior. \diamond

1.2.2. Conjunto no acotado

Si el conjunto $X \neq \emptyset$ no es acotado, entonces se puede expresar en función de sus puntos extremos y direcciones extremas. Sean x^1, x^2, \dots, x^s los puntos extremos de X y d^1, d^2, \dots, d^t sus direcciones extremas, entonces

$$X = \{x = \sum_{i=1}^s \lambda_i x^i + \sum_{j=1}^t \mu_j d^j, \ \lambda_i \geq 0 \ \forall i, \ \sum_{i=1}^s \lambda_i = 1, \ \mu_j \geq 0 \ \forall j\}.$$

Así el problema (1.1) se puede reescribir

$$\begin{aligned}
\min \ z &= \sum_{i=1}^s c^T x^i \lambda_i + \sum_{j=1}^t c^T d^j \mu_j \\
&\quad \sum_{i=1}^s A x^i \lambda_i + \sum_{j=1}^t A d^j \mu_j = b \\
&\quad \sum_{i=1}^s \lambda_i = 1
\end{aligned}$$

$$\lambda, \mu \geq 0$$

y de manera más compacta

$$\begin{aligned} \min \ z &= f^T \begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \end{bmatrix} \\ D \begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \end{bmatrix} &= g \\ \lambda, \mu &\geq 0, \end{aligned} \tag{1.7}$$

donde

$$\begin{aligned} f^T &= [c^T x^1 \ \dots \ c^T x^s \ \ c^T d^1 \ \dots \ c^T d^t] \\ f &\in \mathbb{R}^{(s+t) \times 1} \\ D &= \begin{bmatrix} Ax^1 & \dots & Ax^s & Ad^1 & \dots & Ad^t \\ 1 & & 1 & 0 & & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(m+1) \times (s+t)} \\ g &= \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(m+1) \times 1}. \end{aligned}$$

Cuando X es separable, o sea, cuando X se puede definir por medio de una matriz diagonal por bloques, las direcciones están relacionadas por el siguiente resultado.

Si \mathbf{d}^k es una dirección extrema de X^k , entonces

$$d = (0, \dots, 0, \mathbf{d}^k, 0, \dots, 0)$$

es dirección extrema de X .

Los cambios que se presentan ante la presencia de direcciones extremas de X son los siguientes:

- Las variables, en el caso general, serán: λ_i, μ_j , las variables de holgura y las variables artificiales.

- Para problemas separables, se trabaja con una dirección extrema de X cuando en uno de los subproblemas se tiene óptimo no acotado y una dirección de descenso d^k , permitiendo construir d^j una dirección extrema de X .
- En las condiciones anteriores, $\tilde{f}_e = \gamma^T d^j < 0$. Es el mismo valor del costo reducido del subproblema. Recuérdese que para puntos extremos, $\tilde{f}_e = \gamma^T x^i + \pi_{m+1}$.
- La columna de D correspondiente a μ_j es:

$$D_{\cdot e} = \begin{bmatrix} A d^j \\ 0 \end{bmatrix}.$$

La escogencia de la variable básica que sale y el pivoteo se hacen como en el caso acotado.

- Se puede presentar que

$$D_B^{-1} D_{\cdot e} \leq 0.$$

En este caso, no se puede escoger la variable básica que sale, el problema general tiene óptimo no acotado y se puede construir una dirección de descenso. La dirección se construye de manera análoga a como se hace en el simplex cuando en la columna de la variable que entra no hay elementos positivos.

$$d = d^j - \sum_{i=1}^{m+1} y_i d^{i'},$$

donde $y = D_B^{-1} D_{\cdot e}$ y el símbolo $*$ indica que la suma se hace únicamente con los índices de las variables básicas correspondientes a direcciones. La dirección $d^{i'}$ es la dirección correspondiente a la i -ésima variable básica.

Ejemplo 1.8.

$$\begin{aligned}
\min \quad & z = 4x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 \\
\text{subject to} \quad & x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 \leq 5 \\
& x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \leq 8 \\
& 2x_1 + x_2 \geq 3 \\
& x_1 + x_2 \geq 2 \\
& x_4 \leq 2 \\
& x_3 - x_4 \geq 2 \\
& x \geq 0.
\end{aligned}$$

Las dos primeras restricciones son las de acople. Las cuatro siguientes y las de no negatividad definen el conjunto X , en el cual es fácil resolver un problema de OL.

Es necesario introducir dos variables de holgura, x_5 y x_6 , para las restricciones de acople.

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 &= 5 \\
x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 + x_6 &= 8
\end{aligned}$$

Para empezar, se requieren tres variables básicas. Además de x_5 y x_6 , la tercera puede ser x_7 , variable artificial para la tercera fila ($\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_s = 1$).

$$D_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Como x_5 y x_6 son variables de holgura, su costo f_j es 0. Para x_7 , el costo artificial es 1.

$$\begin{aligned}
\pi^T &= -f_B^T D_B^{-1} = -[0 \ 0 \ 1] D_B^{-1} \\
\pi^T &= [0 \ 0 \ -1] \\
-z &= \pi^T g^0 = [0 \ 0 \ -1] \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix} \\
-z &= -1.
\end{aligned}$$

La tabla o matriz R del simplex revisado para el método de descomposición es:

$$\begin{array}{l} x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ -z \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Iteración 1-1:

Como no hay variables de holgura libres, se procede a resolver un problema de OL en X :

$$\begin{aligned} \gamma^T &= c^T + \bar{\pi}^T A \\ &= [0 \ 0 \ 0 \ 0] + [0 \ 0] A \\ \gamma^T &= [0 \ 0 \ 0 \ 0]. \end{aligned}$$

En X hay muchos puntos factibles, luego muchos puntos óptimos para este problema. Al minimizar $\gamma^T x$ con $x \in X$, se obtiene, por ejemplo

$$\begin{aligned} x^1 &= (1, 1, 2, 0), \\ \bar{\varphi} &= 0, \\ \tilde{f}_e &= \bar{\varphi} + \pi_{m+1} \\ &= 0 + -1 = -1. \end{aligned}$$

Se deduce que la tabla actual no es óptima y que λ_1 entra a la base.

$$\begin{aligned} D_{.1} &= \begin{bmatrix} Ax^1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ D_B^{-1}D_{.1} &= \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ahora hay que agregar, a la tabla del simplex revisado, la columna $D_B^{-1}D_{.1}$ y el valor \tilde{f}_e .

$$\begin{array}{c} x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ -z \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Para escoger la variable que sale es necesario considerar los cocientes $5/6$, $8/1$ y $1/1$. La variable básica que sale es la primera, o sea, x_5 . Ahora se pivotea sobre el elemento R_{15} .

$$\begin{array}{c} \lambda_1 \\ x_6 \\ x_7 \\ -z \end{array} \begin{bmatrix} 1/6 & 0 & 0 & 5/6 \\ -1/6 & 1 & 0 & 43/6 \\ -1/6 & 0 & 1 & 1/6 \\ 1/6 & 0 & -1 & -1/6 \end{bmatrix}$$

Iteración 1-2:

La variable de holgura por defecto x_5 es libre, su costo reducido es $\pi_1 = 1/6 > 0$. Entonces se procede a resolver un problema de OL en X :

$$\begin{aligned} \gamma^T &= [0 \ 0 \ 0 \ 0] + [1/6 \ 0] A \\ \gamma^T &= [1/6 \ 1/6 \ 1/3 \ -1/2]. \end{aligned}$$

Al minimizar $\gamma^T x$ con $x \in X$, se obtiene,

$$\begin{aligned} x^2 &= (1, 1, 4, 2), \\ \bar{\varphi} &= 2/3, \\ \tilde{f}_e &= \bar{\varphi} + \pi_{m+1} \\ &= 2/3 + -1 = -1/3. \end{aligned}$$

Se deduce que la tabla actual no es óptima y que λ_2 entra a la base.

$$\begin{aligned} D_{.2} &= \begin{bmatrix} Ax^2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ D_B^{-1} D_{.2} &= \begin{bmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ahora hay que agregar, a la tabla del simplex revisado, la columna $D_B^{-1}D_{\cdot 2}$ y el valor \tilde{f}_e .

$$\begin{array}{c} \lambda_1 \quad \left[\begin{array}{ccccc} 1/6 & 0 & 0 & 5/6 & 2/3 \end{array} \right] \\ x_6 \quad \left[\begin{array}{ccccc} -1/6 & 1 & 0 & 43/6 & 1/3 \end{array} \right] \\ x_7 \quad \left[\begin{array}{ccccc} -1/6 & 0 & 1 & 1/6 & 1/3 \end{array} \right] \\ -z \quad \left[\begin{array}{ccccc} 1/6 & 0 & -1 & -1/6 & -1/3 \end{array} \right] \end{array}$$

Para escoger la variable que sale es necesario considerar los cocientes $(5/6)/(2/3)$, $(43/6)/(1/3)$ y $(1/6)/(1/3)$. La variable básica que sale es la tercera, o sea, x_7 . Ahora se pivotea sobre el elemento R_{35} .

$$\begin{array}{c} \lambda_1 \quad \left[\begin{array}{cccc} 1/2 & 0 & -2 & 1/2 \end{array} \right] \\ x_6 \quad \left[\begin{array}{cccc} 0 & 1 & -1 & 7 \end{array} \right] \\ \lambda_2 \quad \left[\begin{array}{cccc} -1/2 & 0 & 3 & 1/2 \end{array} \right] \\ -z \quad \left[\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{array}$$

Como ya se anuló la única variable artificial que había, se tiene el óptimo de la primera fase. No es necesario calcular γ ni resolver un problema de OL para obtener \tilde{f}_e .

Segunda fase:

De la última tabla, únicamente es necesario recalcular π^T y $-z$ utilizando los costos reales.

$$\begin{aligned} f_1 &= c^T x^1 \\ &= [4 \quad 1 \quad -2 \quad 1] \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= 1 \\ f_2 &= c^T x^2 \\ &= [4 \quad 1 \quad -2 \quad 1] \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} \\ &= -1 \end{aligned}$$

Para la variable x_6 el costo es 0.

$$\begin{aligned}
\pi^T &= -f_B D_B^{-1} \\
&= -[1 \ 0 \ -1] \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1/2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \\
&= [-1 \ 0 \ 5] \\
-z &= \pi^T g^0 \\
&= [-1 \ 0 \ 5] \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{ll}
\lambda_1 & \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & -2 & 1/2 \end{bmatrix} \\
x_6 & \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 7 \end{bmatrix} \\
\lambda_2 & \begin{bmatrix} -1/2 & 0 & 3 & 1/2 \end{bmatrix} \\
-z & \begin{bmatrix} -1 & 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}
\end{array}$$

Iteración 2-1:

El punto actual es $x = \lambda_1 x^1 + \lambda_2 x^2 = (1, 1, 3, 1)$. El costo reducido de variable de holgura por defecto x_5 es $\tilde{f}_e = \pi_1 = -1$. Luego x_5 entra a la base.

$$\begin{aligned}
D_{\cdot e} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
D_B^{-1} D_{\cdot e} &= \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1/2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ -1/2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Ahora hay que agregar, a la tabla del simplex revisado, la columna $D_B^{-1} D_{\cdot e}$ y el valor \tilde{f}_e .

$$\begin{array}{c} \lambda_1 \\ x_6 \\ \lambda_2 \\ -z \end{array} \left[\begin{array}{ccccc} 1/2 & 0 & -2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1 & 7 & 0 \\ -1/2 & 0 & 3 & 1/2 & -1/2 \\ -1 & 0 & 5 & 0 & -1 \end{array} \right]$$

Sale la primera variable básica, o sea, λ_1 . Al pivotear sobre R_{15} se obtiene:

$$\begin{array}{c} x_5 \\ x_6 \\ \lambda_2 \\ -z \end{array} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

Iteración 2-2:

El punto actual es $x = \lambda_2 x^2 = (1, 1, 4, 2)$. No hay variables de holgura libres. Entonces se procede a resolver un problema de OL en X :

$$\begin{aligned} \gamma^T &= [4 \ 1 \ -2 \ 1] + [0 \ 0] A \\ \gamma^T &= [4 \ 1 \ -2 \ 1]. \end{aligned}$$

Ahora se minimiza $\gamma^T x$ con $x \in X$. En X_1 se obtiene $\gamma^T x = (0, 3)$. En X_2 resulta óptimo no acotado con la dirección de descenso $(1, 0)$. Entonces para el problema en X ,

$$d^1 = (0, 0, 1, 0)$$

es una dirección extrema de descenso y $\tilde{f}_e = c^T d^1 = -2$

$$\begin{aligned} D_{.e} &= \begin{bmatrix} Ad^1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ D_B^{-1} D_{.e} &= \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ahora hay que agregar, a la tabla del simplex revisado, la columna $D_B^{-1} D_{.e}$ y el valor \tilde{f}_e .

$$\begin{array}{l} x_5 \\ x_6 \\ \lambda_2 \\ -z \end{array} \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \end{array} \right]$$

Necesariamente sale la primera variable básica, o sea, x_5 . Al pivotear sobre R_{15} se obtiene:

$$\begin{array}{l} \mu_1 \\ x_6 \\ \lambda_2 \\ -z \end{array} \left[\begin{array}{ccccc} 1/2 & 0 & -2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & -3 & 15/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 2 \end{array} \right]$$

Iteración 2-3:

El punto actual es $x = \mu_1 d^1 + \lambda_2 x^2 = (1, 1, 9/2, 2)$. La variable x_5 es de holgura por defecto libre. Su costo reducido es $\pi_1 = 1$. Entonces se procede a resolver un problema de OL en X .

$$\begin{aligned} \gamma^T &= [4 \ 1 \ -2 \ 1] + [1 \ 0] A \\ \gamma^T &= [5 \ 2 \ 0 \ -2]. \end{aligned}$$

Al minimizar $\gamma^T x$ con $x \in X$, se obtiene,

$$\begin{aligned} x^3 &= (0, 3, 4, 2), \\ \bar{\varphi} &= 2, \\ \tilde{f}_e &= \bar{\varphi} + \pi_{m+1} \\ &= 2 + -3 = -1. \end{aligned}$$

Se deduce que la tabla actual no es óptima y que λ_3 entra a la base.

$$\begin{aligned} D_{\cdot e} &= \begin{bmatrix} Ax^3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \\ D_B^{-1} D_{\cdot e} &= \begin{bmatrix} 1/2 \\ 7/2 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ahora hay que agregar, a la tabla del simplex revisado, la columna $D_B^{-1}D_{\cdot e}$ y el valor \tilde{f}_e .

$$\begin{array}{c} \mu_1 \\ x_6 \\ \lambda_2 \\ -z \end{array} \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & -2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & -3 & 15/2 & 7/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Para escoger la variable que sale es necesario considerar los cocientes $(1/2)/(1/2)$, $(15/2)/(7/2)$ y $1/1$. La variable básica que sale es la primera, o sea, μ_1 . Ahora se pivotea sobre el elemento R_{15} .

$$\begin{array}{c} \lambda_3 \\ x_6 \\ \lambda_2 \\ -z \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & 1 \\ -3 & 1 & 11 & 4 \\ -1 & 0 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & -7 & 3 \end{bmatrix}$$

Iteración 2-4:

El punto actual es $x = \lambda_3 x^3 + \lambda_2 x^2 = (0, 3, 4, 2)$. La variable x_5 es de holgura por defecto libre. Su costo reducido es $\pi_1 = 2$. Entonces se procede a resolver un problema de OL en X .

$$\begin{aligned} \gamma^T &= [4 \ 1 \ -2 \ 1] + [2 \ 0] A \\ \gamma^T &= [6 \ 3 \ 2 \ -5]. \end{aligned}$$

Al minimizar $\gamma^T x$ con $x \in X$, se obtiene,

$$\begin{aligned} x^4 &= (1, 1, 4, 2), \\ \bar{\varphi} &= 7, \\ \tilde{f}_e &= \bar{\varphi} + \pi_{m+1} \\ &= 7 + -7 = 0. \end{aligned}$$

Se deduce que la tabla actual es óptima y que

$$\begin{aligned} x^* &= x_{\text{actual}} \\ x^* &= (0, 3, 4, 2) \\ z^* &= -3. \quad \diamond \end{aligned}$$

Ejemplo 1.9.

$$\begin{aligned}
 \min \quad & z = -3x_1 + 4x_2 - 10x_3 - 6x_4 \\
 & -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 \geq 4 \\
 \\
 & 2x_1 - x_2 \geq 3 \\
 & x_1 - x_2 \leq 5 \\
 & x_4 \leq 2 \\
 & x_3 - x_4 \geq 2 \\
 & x \geq 0.
 \end{aligned}$$

Es necesario introducir x_5 , variable de holgura por exceso y x_6, x_7 , variables artificiales, que serán las variables básicas.

$$D_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D_B^{-1} = D_B.$$

$$\begin{aligned}
 \pi^T &= -f_B^T D_B^{-1} = -[1 \ 1] D_B^{-1} \\
 \pi^T &= [-1 \ -1] \\
 -z &= \pi^T g^0 = [-1 \ -1] \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} \\
 -z &= -5.
 \end{aligned}$$

La tabla o matriz R del simplex revisado para el método de descomposición es:

$$\begin{array}{c}
 x_6 \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -5 \end{bmatrix} \\
 x_7 \\
 -z
 \end{array}$$

Iteración 1-1:

Para x_5 , variable de holgura por exceso, el costo reducido es $-\pi_1 = -1 = 1$. Entonces:

$$\begin{aligned}
 \gamma^T &= c^T + \bar{\pi}^T A \\
 &= [0 \ 0 \ 0 \ 0] + [-1] A \\
 \gamma^T &= [1 \ -1 \ 1 \ -1].
 \end{aligned}$$

Al minimizar $\gamma^T x$ con $x \in X$, en X_1 se obtiene óptimo no acotado con dirección de descenso $(1/2, 1)$. Entonces se construye una dirección extrema de descenso para X

$$\begin{aligned} d^1 &= (1/2, 1, 0, 0), \\ \tilde{f}_e &= \gamma^T d^1 \\ &= -1/2. \end{aligned}$$

Se deduce que la tabla actual no es óptima y que μ_1 entra a la base.

$$\begin{aligned} D_{\cdot e} &= \begin{bmatrix} Ad^1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \end{bmatrix} \\ D_B^{-1} D_{\cdot e} &= \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{l} x_6 \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -z & -1 & -1 & -5 \end{bmatrix} \\ x_7 \\ -z \end{array}$$

Sale x_6 .

$$\begin{array}{l} \mu_1 \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 1 \\ -z & -1 & -1 \end{bmatrix} \\ x_7 \\ -z \end{array}$$

Iteración 1-2:

Para x_5 , variable de holgura por exceso, el costo reducido es $-\pi_1 = 0$. Entonces:

$$\begin{aligned} \gamma^T &= c^T + \bar{\pi}^T A \\ &= [0 \ 0 \ 0 \ 0] + [0] A \\ \gamma^T &= [0 \ 0 \ 0 \ 0]. \end{aligned}$$

$$x^1 = (3/2, 0, 2, 0),$$

$$\begin{aligned}\tilde{f}_e &= \gamma^T x^1 + \pi_{m+1} \\ &= 0 + -1 = -1.\end{aligned}$$

La tabla actual no es óptima y λ_1 entra a la base.

$$\begin{aligned}D_{\cdot e} &= \begin{bmatrix} Ax^1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7/2 \\ 1 \end{bmatrix} \\ D_B^{-1} D_{\cdot e} &= \begin{bmatrix} -7 \\ 1 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{array}{c} \mu_1 \\ x_7 \\ -z \end{array} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 8 & -7 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Sale x_7 .

$$\begin{array}{c} \mu_1 \\ \lambda_1 \\ -z \end{array} \begin{bmatrix} 2 & 7 & 15 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Como las variables artificiales son nulas, se puede afirmar que la tabla anterior es óptima, sin minimizar $\gamma^T x$ con $x \in X$.

Segunda fase:

$$\begin{aligned}f_B &= \begin{bmatrix} c^T d^1 \\ c^T x^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/2 \\ -49/2 \end{bmatrix} \\ \pi^T &= -f_B^T D_B^{-1} = [-5 \quad 7] \\ -z &= \pi^T g^0 = -13\end{aligned}$$

$$\begin{array}{c} \mu_1 \\ \lambda_1 \\ -z \end{array} \begin{bmatrix} 2 & 7 & 15 \\ 0 & 1 & 1 \\ -5 & 7 & -13 \end{bmatrix}$$

Iteración 2-1:

El punto actual es $x = \mu_1 d^1 + \lambda_1 x^1 = 15d^1 + x^1 = (9, 15, 2, 0)$ y $z = 13$. Para x_5 , variable de holgura por exceso, el costo reducido es $-\pi_1 = 5$. Entonces:

$$\begin{aligned}
\gamma^T &= c^T + \bar{\pi}^T A \\
&= [-3 \ 4 \ -10 \ -6] + [-5] A \\
\gamma^T &= [2 \ -1 \ -5 \ -11].
\end{aligned}$$

Al minimizar $\gamma^T x$ para $x \in X$, en X_2 se obtiene óptimo no acotado y la dirección de descenso $(1, 0)$. Entonces para X ,

$$d^2 = [0 \ 0 \ 1 \ 0]^T$$

es dirección de descenso.

$$\begin{aligned}
\tilde{f}_e &= \gamma^T d^2 \\
&= -5 \\
D_{\cdot e} &= \begin{bmatrix} Ad^2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
D_B^{-1} D_{\cdot e} &= \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} \\
& \begin{matrix} \mu_1 & \begin{bmatrix} 2 & 7 & 15 & -2 \end{bmatrix} \\ \lambda_1 & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ -z & \begin{bmatrix} -5 & 7 & -13 & -5 \end{bmatrix} \end{matrix}
\end{aligned}$$

Como $D_B^{-1} D_{\cdot e} \leq 0$, entonces el problema completo tiene óptimo no acotado. Se puede construir una dirección de descenso:

$$\begin{aligned}
d &= d^2 - (-2)d^1 \\
&= [0 \ 0 \ 1 \ 0]^T + 2 [1/2 \ 1 \ 0 \ 0]^T \\
&= [1 \ 2 \ 1 \ 0]^T \\
c^T d &= -5. \quad \diamond
\end{aligned}$$

Ejercicios

1.1 Resuelva utilizando el método simplex acotado

$$\begin{aligned} \min \quad & z = 3x_1 - 4x_2 \\ \text{subject to} \quad & x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ & 4x_1 + 3x_2 \leq 20 \\ & 1 \leq x_1 \leq 10 \\ & 2 \leq x_2 \leq 4. \end{aligned}$$

Respuesta: $x = (1, 4)$, $z = -13$.

1.2 Resuelva utilizando el método simplex acotado

$$\begin{aligned} \min \quad & z = -5x_1 - 2x_2 \\ \text{subject to} \quad & 5x_1 + 2x_2 \geq 40 \\ & 4x_1 + 9x_2 \geq 50 \\ & 3 \leq x_1 \leq 10 \\ & 4 \leq x_2 \leq 20. \end{aligned}$$

Respuesta: $x = (10, 20)$, $z = -90$.

1.3 Resuelva utilizando el método simplex acotado

$$\begin{aligned} \min \quad & z = -5x_1 - 2x_2 \\ \text{subject to} \quad & 5x_1 + 2x_2 \geq 40 \\ & 4x_1 + 9x_2 \geq 50 \\ & 3 \leq x_1 \leq 5 \\ & 4 \leq x_2 \leq 5. \end{aligned}$$

Respuesta: no hay puntos factibles.

1.4 Resuelva utilizando el método simplex acotado

$$\min \quad z = -5x_1 - 2x_2$$

$$\begin{aligned}
 5x_1 + 2x_2 &\geq 40 \\
 4x_1 + 9x_2 &\geq 50 \\
 2 \leq x_1 &\leq 5 \\
 3 \leq x_2 &
 \end{aligned}$$

Respuesta: óptimo no acotado.

1.5 Resuelva utilizando el método simplex acotado

$$\begin{aligned}
 \min z &= 9.5x_1 + 7x_2 \\
 x_1 + 2x_2 &\geq 11 \\
 3x_1 + 2x_2 &\geq 19 \\
 0 \leq x_1 &\leq 7/2 \\
 1 \leq x_2 &\leq 5
 \end{aligned}$$

Respuesta: $x = (7/2, 17/4)$, $z = 63$.

1.6 Resuelva por el método de descomposición de Dantzig y Wolfe:

$$\begin{aligned}
 \min z &= -10x_1 - 10x_2 - 12x_3 - 8x_4 \\
 2x_1 &\quad + \quad x_3 \quad \leq 4 \\
 x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &\leq 12 \\
 2x_1 + 3x_2 &\quad \leq 6 \\
 x_3 + 2x_4 &\leq 11 \\
 3x_3 + x_4 &\leq 8 \\
 x &\geq 0.
 \end{aligned}$$

Para empezar utilice las variables básicas x_5, x_6 y λ_1 correspondiente a $x^1 = (0, 0, 0, 0)$.

Respuesta: $x = (3/2, 1, 1, 5)$ obtenido con $\lambda_2 = 1/2$, $x^2 = (3, 0, 1, 5)$, $\lambda_4 = 1/2$, $x^4 = (0, 2, 1, 5)$, $z = -77$.

1.7 Resuelva por el método de descomposición de Dantzig y Wolfe:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & z = -10x_1 - 10x_2 - 12x_3 - 8x_4 \\
 & 2x_1 + x_3 \leq 10 \\
 & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 15 \\
 \\
 & 2x_1 + 3x_2 \geq 6 \\
 & x_3 + 2x_4 \geq 4 \\
 & 3x_3 + x_4 \geq 7 \\
 & x \geq 0.
 \end{aligned}$$

Para empezar utilice las variables básicas x_5, x_6 y λ_1 correspondiente a $x^1 = (0, 2, 2, 1)$.

Respuesta: $x = (0, 5, 10, 0)$ obtenido con $\mu_2 = 6$, $d^2 = (0, 0, 1, 0)$, $\mu_1 = 9$, $d^1 = (0, 1/3, 0, 0)$, $\lambda_2 = 1$, $x^2 = (0, 2, 4, 0)$, $z = -170$.

1.8 Resuelva por el método de descomposición de Dantzig y Wolfe:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & z = 6x_1 + 7x_2 + 8x_3 - 9x_4 \\
 & x_1 + x_2 + x_4 \geq 3 \\
 & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 10 \\
 \\
 & x_1 + 2x_2 \leq 3 \\
 & 3x_1 + 2x_2 \geq 5 \\
 & 2x_3 + x_4 \geq 4 \\
 & x \geq 0.
 \end{aligned}$$

Respuesta: $x = (5/3, 0, 0, 25/3)$ obtenido con $\lambda_1 = 1$, $x^1 = (5/3, 0, 0, 4)$, $\mu_1 = 13/3$, $d^1 = (0, 0, 0, 1)$, $z = -65$.

1.9 Resuelva por el método de descomposición de Dantzig y Wolfe:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & z = 6x_1 + 7x_2 + 8x_3 - 9x_4 \\
 & x_1 + x_2 + x_4 \geq 3 \\
 & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 10 \\
 \\
 & x_1 + 2x_2 \leq 3 \\
 & 3x_1 + 2x_2 \geq 5 \\
 & 2x_3 + x_4 \geq 4 \\
 & x \geq 0.
 \end{aligned}$$

Respuesta: óptimo no acotado.

1.10 Resuelva por el método de descomposición de Dantzig y Wolfe:

$$\begin{aligned} \min \quad & z = 6x_1 + 7x_2 + 8x_3 - 9x_4 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 + x_4 \geq 3 \\ & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 10 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ & 2x_3 + x_4 \leq 4 \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

Respuesta: no hay puntos factibles.

Capítulo 2

Optimización entera

Un problema de OL con variables no negativas se puede expresar así:

$$\begin{aligned} \min \ z &= c^T x \\ A_i \cdot x &\geq b_i, \quad i \in M_1 \subseteq M = \{1, \dots, m\}, \\ A_i \cdot x &= b_i, \quad i \in M_2 = M \setminus M_1 \\ x &\in \mathbb{R}_+^n, \end{aligned} \tag{P_r}$$

donde $\mathbb{R}_+^n = \{x \in \mathbb{R}^n : x \geq 0\}$. Relacionado con este problema, se tiene un problema de optimización entera, OE, objeto de estudio del capítulo:

$$\begin{aligned} \min \ z &= c^T x \\ A_i \cdot x &\geq b_i, \quad i \in M_1 \\ A_i \cdot x &= b_i, \quad i \in M_2 \\ x &\in \mathbb{Z}_+^n, \end{aligned} \tag{P_e}$$

donde $\mathbb{Z}_+^n = \{x \in \mathbb{Z}^n : x \geq 0\}$. En la práctica, sin pérdida de generalidad, se puede suponer que todos los valores c_j , a_{ij} y b_i son racionales. Esto implica que se puede obtener una formulación equivalente de los dos problemas donde todos los coeficientes c_j , a_{ij} y b_i son enteros.

Algunos problemas, por su misma naturaleza, son problemas de OE, pero se supone o acepta que si se resuelven como un problema de OL el error cometido es muy pequeño y despreciable. Esto quiere decir que al obtener la solución de P_r , si ésta no es entera, se puede aproximar por un punto entero cercano cometiendo un error despreciable.

Si en la solución por OL de un problema de OE resulta que mensualmente hay que fabricar 8765.4 zapatos, no se comete un error muy grande al decir que hay que fabricar 8765 zapatos.

Sin embargo, en otros problemas, necesariamente se debe considerar que la solución debe ser entera. Como se verá más adelante, no siempre la solución entera está cerca de la solución real.

Si en la solución por OL de un problema de OE resulta que hay que construir 4.56 centrales hidroeléctricas, no se puede decir alegremente que la solución óptima consiste en construir 5 centrales.

En otros problemas, de ninguna manera se puede considerar que una variable entera pueda tomar valores no enteros.

Ejemplo 2.1. Problema de secuenciación. Un taller tiene n contratos de trabajo pero solamente puede hacer uno a la vez. Para cada contrato hay una fecha prevista de entrega g_i . La duración o tiempo requerido para efectuar el trabajo correspondiente al contrato i es d_i (entero positivo). La multa por cada día de retraso en la terminación del contrato es p_i . ¿Cuál debe ser el orden de secuenciación para minimizar la multa?

Para el planteamiento de este problema se supone que si se empieza un trabajo el día j , y éste dura t días, entonces podrá ser entregado al comienzo del día $j + t$, pero no podrá ser entregado al final del día $j + t - 1$.

La programación se debe hacer sobre el número de días necesarios, $T = \sum_i d_i$. El último trabajo realizado se entregará al comienzo del día $T + 1$.

Las variables para este problema pueden ser:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si el contrato } i \text{ empieza el día } j, \\ 0 & \text{si no,} \end{cases}$$

con $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, f_i = T - d_i + 1$. Por ejemplo, si $T = 30$ y $d_2 = 5$, entonces $f_2 = 26$, o sea, el segundo contrato puede empezar, a más tardar, el día 26.

Como cada contrato empieza una y solamente una vez, entonces

$$\sum_{j=1}^{f_i} x_{ij} = 1, \quad i = 1, \dots, n.$$

Para considerar que cada día hay un solo contrato en ejecución, se introduce una variable intermedia, dependiente de x , que sirve para saber si

el trabajo i está en ejecución el día j :

$$y_{ij} = \sum_{k=\max\{1,j-d_i+1\}}^{\min\{j,f_i\}} x_{ik}$$

donde $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, T$. Obviamente esta variable debe cumplir $y_{ij} \leq 1$. Si $y_{ij} = 0$, entonces el día j el trabajo i no está en ejecución. Si $y_{ij} = 1$, entonces el día j el trabajo i está en ejecución. Si $y_{ij} > 1$, se tendría que en los días previos a j el trabajo i empezó varias veces. Hay una restricción más fuerte que incluye la anterior. En cualquier día hay un único trabajo en ejecución.

$$\sum_{i=1}^n y_{ij} = 1, \quad j = 1, \dots, T.$$

A partir de los datos, independiente de x , se pueden construir los valores m_{ij} que facilitan la expresión de la función objetivo:

$$m_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } j + d_i \leq g_i \\ j + d_i - g_i & \text{si } j + d_i > g_i \end{cases}$$

Este valor m_{ij} indica el número de días de multa si el trabajo i empieza el día j , con $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, f_i$. De manera más sencilla

$$m_{ij} = \max\{0, j + d_i - g_i\}.$$

La función objetivo es simplemente

$$\min z = \sum_{i=1}^n p_i \sum_{j=1}^{f_i} m_{ij} x_{ij}. \quad \diamond$$

Ejemplo 2.2. Problema de inversión. El Ministerio de Desarrollo Económico proyecta invertir en n sectores y para cada sector hay m_i alternativas de inversión. En cada sector es necesario llevar a cabo por lo menos n_i alternativas. La planeación se hará a lo largo de T años. Para cada sector i y cada alternativa j , se conoce el flujo de inversión, es decir, se conocen los valores f_{ijk} , monto de la inversión en el año k . Cada alternativa j del sector i genera e_{ij} empleos y produce un beneficio económico b_{ij} , pero la capacidad de inversión de cada año es c_k . Por razones económicas y políticas, es necesario

generar por lo menos E empleos durante estos T años. ¿Qué alternativas de cada sector se deben escoger para maximizar el beneficio?

Con las variables

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si para el sector } i \text{ se escoge la alternativa } j, \\ 0 & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

con $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m_i$, se puede plantear el problema de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \max \quad z &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m_i} b_{ij} x_{ij} \\ &\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m_i} f_{ijk} x_{ij} \leq c_k, \quad k = 1, \dots, T, \\ &\sum_{j=1}^{m_i} x_{ij} \geq n_i, \quad i = 1, \dots, n, \\ &\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m_i} e_{ij} x_{ij} \geq E, \\ &x_{ij} \in \{0, 1\}. \quad \diamond \end{aligned}$$

Ejemplo 2.3. Problema del agente viajero (TSP “traveling salesman problem”). Saliendo de una ciudad, él debe visitar otras $n-1$ ciudades diferentes y regresar a la ciudad inicial sin repetir trayectos ni ciudades. Se conoce una matriz $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$, donde c_{ij} indica el costo correspondiente a ir de la ciudad i a la ciudad j . No necesariamente $c_{ij} = c_{ji}$. Se desea encontrar el orden en que el agente viajero debe hacer la visita para que el costo se minimice.

Sea

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si, después de la ciudad } i, \text{ él visita la ciudad } j, \\ 0 & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

donde $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, i-1, i+1, \dots, n$.

Planteamiento:

$$\begin{aligned}
\min \ z = & \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n c_{ij} x_{ij} \\
& \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n x_{ij} = 1, \quad i = 1, \dots, n, \\
& \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n x_{ij} = 1, \quad j = 1, \dots, n, \\
& \sum_{i \in S, j \notin S} x_{ij} \geq 1, \quad S \subseteq N, 2 \leq |S| \leq n-2, \\
& x_{ij} \in \{0, 1\}.
\end{aligned}$$

El tercer grupo de restricciones evita la presencia de subciclos independientes, por ejemplo, no debe estar permitido el esquema de la figura. Allí, $x_{13} = x_{31} = x_{24} = x_{42} = 1$, las demás variables son nulas. Estos valores de x_{ij} cumplen los dos primeros grupos de restricciones.

3

La idea subyacente en el tercer grupo de restricciones es la siguiente: si S y T son subconjuntos de N no vacíos y disyuntos, entonces debe haber por lo menos un viaje de S a T o uno de T a S ; basta con considerar como posibles conjuntos S y \bar{S} ; los conjuntos de cardinal 1 y los de $n-1$ están considerados en los dos primeros grupos de restricciones \diamond

En lo que sigue se utilizará la siguiente notación:

- $F_A = \{x \in \mathbb{R}^n : A_i \cdot x \geq b_i, i \in M_1, A_i \cdot x = b_i, i \in M_2\}$, conjunto de puntos que cumplen las desigualdades e igualdades.
- $F_r = F_A \cap \mathbb{R}_+^n$, conjunto de puntos factibles para el problema de OL o problema real.
- $F_r^* : \text{conjunto de puntos óptimos para el problema real.}$
- $z_r^* : \text{valor óptimo de } z \text{ para el problema real. Se utiliza la siguiente convención:}$
 - $z_r^* = +\infty$ indica que no hay puntos factibles ($F_r = \emptyset$).
 - $z_r^* = -\infty$ indica que se tiene óptimo no acotado.
- $F_e = F_A \cap \mathbb{Z}_+^n = F_r \cap \mathbb{Z}_+^n = F_r \cap \mathbb{Z}^n$, conjunto de puntos factibles para el problema de OE o problema entero.
- $F_e^* : \text{conjunto de puntos óptimos para el problema entero.}$
- $z_e^* : \text{valor óptimo de } z \text{ para el problema entero.}$

Algunos resultados son inmediatos:

- $F_e \subseteq F_r$.
- $z_r^* \leq z_e^*$
- Puede suceder que $F_r \neq \emptyset$ y $F_e = \emptyset$.

Ejemplo 2.4.

$$\begin{aligned}
 \min \quad & z = 3x_1 + 4x_2 \\
 \text{subject to} \quad & x_1 + 9x_2 \leq 6 \\
 & -x_1 + 9x_2 \geq 3 \\
 & x \geq 0
 \end{aligned}$$

1

0	1	2
0	1	2

Para estas restricciones, F_r es la región sombreada. En cambio $F_e = \emptyset$. \diamond

Ejemplo 2.5. Considere los problemas de OL y OE definidos por las siguientes restricciones:

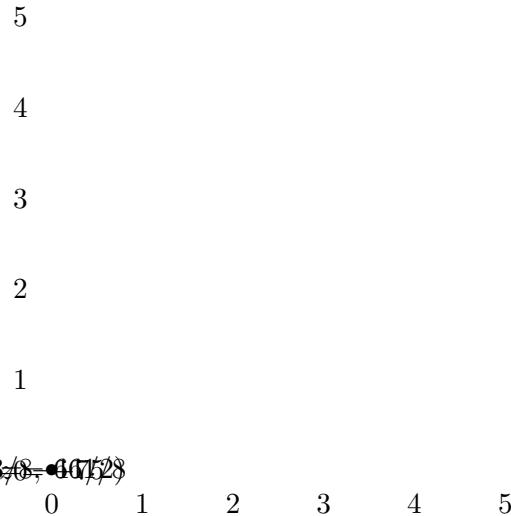
$$\begin{aligned}
 \min \quad z &= -15x_1 - 14x_2 \\
 2x_2 &\leq 11 \\
 12x_1 + 11x_2 &\leq 65 \\
 x_1 &\leq 5 \\
 x &\geq 0
 \end{aligned}$$

Los puntos extremos de F_r son

$$\begin{array}{ll}
 (5, 5/11) & z = -895/11 \\
 (3/8, 11/2) & z = -661/8 \\
 (5, 0) & z = -75 \\
 (0, 11/2) & z = -77 \\
 (0, 0) & z = 0
 \end{array}$$

Como F_r es acotado, simplemente se escoge el mejor punto extremo, o sea que para el problema P_r .

$$x_r^* = (3/8, 11/2).$$



F_e está formado por los puntos enteros de F_r , es decir, por $(0, 0), (0, 1), \dots, (0, 5), (1, 0), (1, 1), \dots, (1, 4), \dots, (4, 0), (4, 1), (5, 0)$. De ellos, el mejor es

$$x_e^* = (5, 0), \quad z_e^* = -75.$$

Obsérvese que el punto óptimo para el problema P_e está muy alejado del punto óptimo del problema P_r . \diamond

Definición 2.1. Sean P_1 y P_2 dos problemas de optimización cuyos conjuntos admisibles son F_1 y F_2 . Se dice que P_2 es una *relajación* de P_1 si los dos problemas tienen la misma función objetivo y $F_1 \subseteq F_2$. Se dice P_2 es una *relajación lineal* si P_2 , además de ser una relajación de P_1 , es un problema de OL.

En lo que sigue, mientras no se diga lo contrario, cuando se mencione una relajación se supone que se trata de una relajación lineal. De todas maneras algunas veces se enfatizará que se trata de una relajación lineal.

El problema P_r es una relajación lineal del problema P_e . En general, los métodos de OE buscan obtener, de manera iterativa, un problema P' ,

relajación lineal de P_e , tal que la (una) solución de P' sea también solución de P_e .

Para el problema de OE del ejemplo anterior, una relajación muy buena es la siguiente:

$$\begin{aligned} \min \quad & z = -15x_1 - 14x_2 \\ & x_1 + x_2 \leq 5 \\ & x \in \mathbb{R}_+^n \end{aligned}$$

Definición 2.2. Un *corte o plano cortante* es simplemente una restricción adicional de la forma $g^T x \leq \varphi$ (o de la forma $g^T x \geq \varphi$).

En una parte importante de los métodos de OE, se arranca con la relajación natural de P_e , es decir con $P_0 = P_r$. De manera iterativa se construyen, mediante cortes, relajaciones lineales más estrictas que las anteriores, es decir, los conjuntos admisibles deben ser subconjuntos propios de los anteriores. Obviamente estas relajaciones no pueden quitar puntos factibles enteros. El proceso acaba cuando la solución de una relajación es un punto entero.

```

 $P_0 = P_r$ 
 $F_0 = F_r$ 
para  $k = 0, 1, 2, \dots$ 
  obtener  $x^k$  solución de  $P_k$ 
  si  $x^k \in \mathbb{Z}^n$ , ent parar
  obtener un corte adecuado  $g^{k^T} x \leq \varphi_k$ 
   $F_{k+1} = F_k \cap \{x : g^{k^T} x \leq \varphi_k\}$ 
fin-para

```

En el problema P_k hay que minimizar $c^T x$ con $x \in F_k$. Un corte es adecuado si:

$$\begin{aligned} F_{k+1} &\subsetneq F_k, \\ F_{k+1} &\supseteq F_e. \end{aligned}$$

2.1. Cortes de Gomory

Este método se aplica a problemas de OE escritos en la forma estándar. Está dentro de los descritos anteriormente. Tiene las siguientes características adicionales:

- El proceso es finito.
- El punto óptimo de problema actual no cumple el corte.

Sea $\lfloor t \rfloor$ la parte entera inferior y $\{t\}$ la *parte fraccionaria* de un real, es decir, $\{t\} = t - \lfloor t \rfloor$. Cuando en un problema P_k , el punto óptimo no es entero, el corte de Gomory se escoge de la siguiente manera:

$$\{b_r\} = \max_{1 \leq i \leq m} \{b_i\} \quad (2.1)$$

$$\sum_{x_j \text{ libre}} \{a_{rj}\} x_j \geq \{b_r\}, \quad (2.2)$$

donde los valores b_i y a_{rj} se toman de la última tabla.

Este corte (o restricción adicional) resulta de las siguientes consideraciones. La restricción r es:

$$\sum_{j=1}^n a_{rj} x_j = b_r.$$

Separando en columnas básicas y libres:

$$\sum_{x_j \text{ básica}} a_{rj} x_j + \sum_{x_j \text{ libre}} a_{rj} x_j = b_r.$$

Para las columnas básicas, todos los coeficientes son nulos salvo uno:

$$x_{\beta_r} + \sum_{x_j \text{ libre}} a_{rj} x_j = b_r.$$

Separando parte entera y fraccionaria:

$$x_{\beta_r} + \sum_{x_j \text{ libre}} \{a_{rj}\} x_j + \sum_{x_j \text{ libre}} \lfloor a_{rj} \rfloor x_j = \{b_r\} + \lfloor b_r \rfloor.$$

Agrupando:

$$\{b_r\} - \sum_{x_j \text{ libre}} \{a_{rj}\} x_j = x_{\beta_r} + \sum_{x_j \text{ libre}} \lfloor a_{rj} \rfloor x_j - \lfloor b_r \rfloor.$$

Como x debe ser entero:

$$\{b_r\} - \sum_{x_j \text{ libre}} \{a_{rj}\} x_j \in \mathbb{Z}. \quad (2.3)$$

Como $\{b_r\} < 1$ y $\sum_{x_j \text{ libre}} \{a_{rj}\} x_j \geq 0$, entonces

$$\{b_r\} - \sum_{x_j \text{ libre}} \{a_{rj}\} x_j \leq 0.$$

La anterior desigualdad es el corte de Gomory. Si para todas las columnas libres $\{a_{rj}\} = 0$, entonces habría una contradicción en (2.3). Se puede mostrar que el punto x^k obtenido no satisface el corte, es decir, $x^k \notin P_{k+1}$.

Una manera eficiente de implementar el método de cortes de Gomory consiste en utilizar el simplex dual, ya que al agregar un corte que no es cumplido por el punto óptimo actual, esta restricción se puede agregar a la última tabla, los costos reducidos (no negativos) no van a cambiar y se tendrá un término independiente negativo. Sin embargo, en la práctica, el método de cortes de Gomory no es muy eficiente.

Ejemplo 2.6.

$$\begin{aligned} \min z &= -11x_1 - 12x_2 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 10 \\ 3x_1 + 2x_2 &\leq 13 \\ x &\in \mathbb{Z}_+^n \end{aligned}$$

Para la relajación inicial se quita la restricción de integralidad. Al resolver ese problema de OL se obtiene la siguiente tabla o matriz ampliada óptima.

$$\begin{array}{c} x_2 \\ x_1 \\ -z \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3/4 & -1/4 & 17/4 \\ 1 & 0 & -1/2 & 1/2 & 3/2 \\ 0 & 0 & 7/2 & 5/2 & 135/2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_r &= [3/2 \ 17/4 \ 0 \ 0]^T \\ \{b_r\} &= \{b_2\} = 1/2 \end{aligned}$$

Corte:

$$(1/2)x_3 + (1/2)x_4 \geq 1/2$$

Variable de holgura:

$$(1/2)x_3 + (1/2)x_4 - x_5 = 1/2$$

Al agregar esta nueva restricción a las 2 igualdades de la tabla óptima se tiene:

$$\begin{array}{l} x_2 \\ x_1 \\ -z \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3/4 & -1/4 & 0 & 17/4 \\ 1 & 0 & -1/2 & 1/2 & 0 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & -1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 7/2 & 5/2 & 0 & 135/2 \end{bmatrix}$$

Para aplicar el simplex dual se requiere la matriz identidad. Ésta se puede obtener multiplicando la tercera igualdad por -1 .

$$\begin{array}{l} x_2 \\ x_1 \\ x_5 \\ -z \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3/4 & -1/4 & 0 & 17/4 \\ 1 & 0 & -1/2 & 1/2 & 0 & 3/2 \\ 0 & 0 & -1/2 & -1/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 7/2 & 5/2 & 0 & 135/2 \end{bmatrix}$$

Sale la variable $x_{\beta_3} = x_5$ y entra x_4 . Se pivotea sobre el elemento a_{34} .

$$\begin{array}{l} x_2 \\ x_1 \\ x_4 \\ -z \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & -1/2 & 9/2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 & 65 \end{bmatrix}$$

Esta tabla, además de tener costos reducidos no negativos, es factible, luego

$$x^* = [1 \ 9/2 \ 0 \ 1 \ 0]^T.$$

Pero este punto no es entero, luego se crea un nuevo corte, a partir de los elementos de la primera fila

$$(1/2)x_5 \geq 1/2.$$

Al agregar este corte al problema anterior se obtiene

$$x^* = [0 \ 5 \ 0 \ 3 \ 1 \ 0]^T,$$

punto entero. Luego, para el problema original de OE

$$x^* = [0 \ 5]^T. \quad \diamond$$

2.2. Ramificación y acotamiento

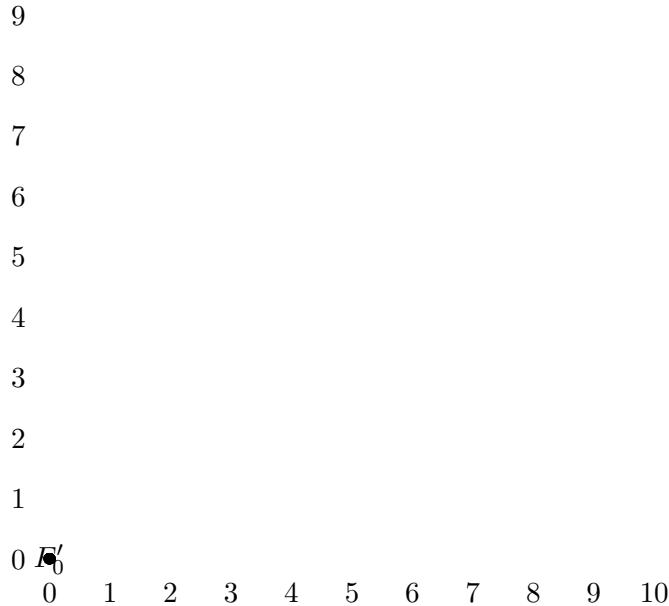
Generalmente se habla del método de ramificación y acotamiento, MRA, o bifurcación y acotamiento, “branch and bound”, aunque más que un método específico y preciso, se trata de un grupo de métodos que tienen en común ciertas reglas. La mayoría del software comercial para OE está basado en el RA, al que se le agregan otras técnicas y refinamientos para hacerlo más eficiente.

El espíritu del método está basado en el célebre dicho “*divide y vencerás*”. Sea P_0 el problema inicial P_e y P'_0 su relajación lineal. Si la solución de P'_0 es entera, entonces también es solución de P_e . Si no es entera, entonces el conjunto factible de P_0 se divide en dos conjuntos disyuntos F_1 y F_2 . Eso da origen a dos problemas de OE, P_1 y P_2 , de tal forma que la solución de P_e debe ser la solución de P_1 o la solución de P_2 . Para resolver estos dos problemas de OE, se procede a resolver la relajación lineal de cada uno de ellos. Para cada uno de estos problemas se repite el proceso hasta haber estudiado todos los casos posibles. Estudiar un caso quiere decir resolver la relajación lineal o descartar adecuadamente el caso sin tener que resolver la relajación lineal.

Ejemplo 2.7.

$$\begin{aligned}
 \min \quad & z = 5x_1 + 6x_2 \\
 \text{subject to} \quad & 2x_1 + x_2 \geq 13 \\
 & x_1 + 2x_2 \geq 12 \\
 & x_1 + x_2 \leq 11 \\
 & x \in \mathbb{Z}_+^n
 \end{aligned}$$

El problema anterior es P_e , o sea, P_0 .



La relajación lineal de P_0 es:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & z = 5x_1 + 6x_2 \\
 \text{s.t.} \quad & 2x_1 + x_2 \geq 13 \\
 & x_1 + 2x_2 \geq 12 \\
 & x_1 + x_2 \leq 11 \\
 & x \in \mathbb{R}_+^n
 \end{aligned} \tag{P'_0}$$

Su solución es

$$x^0 = [14/3 \quad 11/3]^T, \quad z^0 = 136/3.$$

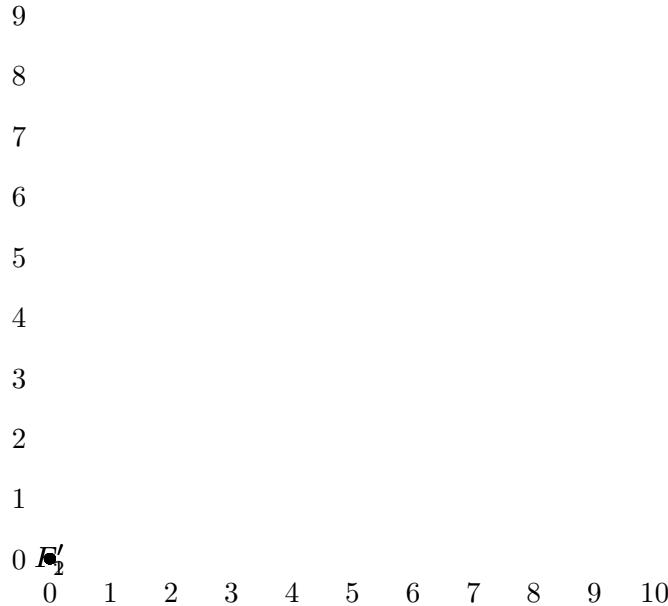
Vamos a dividir F_0 , el conjunto factible de P_0 , de acuerdo a la variable $x_1 = 14/3 = 4 + 2/3$, que no es entera en la solución de P'_0 .

$$\begin{aligned}
 F_1 &= \{x \in F_0 : x_1 \leq 4\}, \\
 F_2 &= \{x \in F_0 : x_1 \geq 5\}.
 \end{aligned}$$

Explícitamente, F_1 se puede representar por las restricciones:

$$\begin{aligned}
 2x_1 + x_2 &\geq 13 \\
 x_1 + 2x_2 &\geq 12 \\
 x_1 + x_2 &\leq 11 \\
 x_1 &\leq 4 \\
 x &\in \mathbb{Z}_+^n
 \end{aligned}$$

De manera análoga se puede definir F_2 . Al considerar la relajación lineal se tienen los problemas P'_1 y P'_2 , con conjuntos factibles F'_1 y F'_2 .



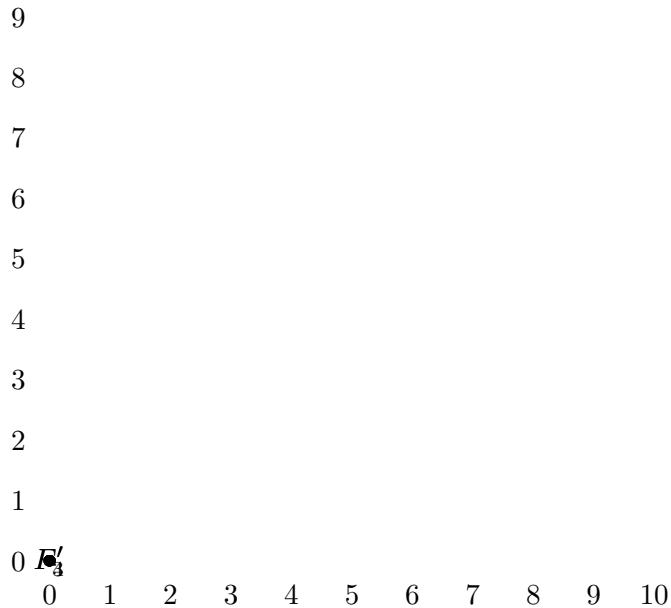
La solución del problema P'_1 es

$$x^1 = [4 \ 5]^T, \quad z^1 = 50,$$

punto entero, que podría ser la solución de P_0 . Sin embargo, es necesario estudiar P'_2 . Su solución es

$$x^2 = [5 \ 7/2]^T, \quad z^2 = 46,$$

punto no entero. Entonces, utilizando la variable no entera $x_2 = 7/2 = 3 + 1/2$, F_2 se puede dividir en dos conjuntos disyuntos, F_3 y F_4 , por medio de las restricciones $x_2 \leq 3$ y $x_2 \geq 4$.



La solución de P'_3 es

$$x^3 = [6 \quad 3]^T, \quad z^3 = 48,$$

punto entero. La solución de P'_4 es

$$x^4 = [5 \quad 4]^T, \quad z^4 = 49,$$

punto entero. Ya se han estudiado todas las posibilidades, luego la solución de P_0 es el mejor punto entero obtenido, o sea,

$$x^* = [6 \quad 3]^T, \quad z^* = 48. \quad \diamond$$

En el MRA el proceso de dividir o bifurcar se acostumbra a representar por medio de un *árbol binario con raíz*. Cada nodo representa un problema, el nodo 0 representa el problema, P_0 , el nodo i representa el problema P_i . Realmente, cada nodo representa dos problemas relacionados, el problema entero P_i y su relajación lineal P'_i . Se usa la terminología usual de *padre* e *hijo*.

En el ejemplo anterior, el problema P_2 es el padre de los problemas P_3 y P_4 . O simplemente, el nodo 2 es padre de 3 y 4 y, perdón por la redundancia, 3 y 4 son hijos de 2.

Cuando se hace la representación gráfica del árbol, se usa la convención usual, la raíz está arriba, y su hijos y nietos están abajo.

$$x \geq 186,732,11/3$$

Se acostumbra decir que un nodo es *descartado* o podado (“pruned”) en uno de los tres casos siguientes:

- No tiene solución.
- Tiene solución entera.
- Se puede afirmar que si el nodo tuviera solución entera, ésta no será mejor que otro punto entero factible ya conocido.

Más adelante hay una explicación detallada del tercer caso.

Cuando un nodo es descartado, es necesario escoger otro nodo para examinarlo. Cuando no hay más nodos para examinar, es decir, todos los nodos fueron estudiados o descartados, entonces ha finalizado el estudio del problema y hay dos resultados posibles:

- La solución del problema P_e es el mejor punto entero obtenido.
- El problema P_e no tiene solución.

Recordemos que se ha supuesto que **la relajación lineal de P_e tiene óptimo finito**. O sea, suponemos que para la relajación lineal inicial no se presenta el caso de óptimo no acotado ni el caso de conjunto factible vacío.

Poco a poco, veremos algunas reglas y algunos criterios para el desarrollo del MRA. Hasta el momento:

- Un nodo, o no tiene hijos, o tiene dos hijos.
- Si en el nodo i , $x_j^i \notin \mathbb{Z}$ y se escoge la variable x_j para bifurcar, entonces los dos hijos de i están dados por las restricciones

$$\begin{aligned} x_j &\leq \lfloor x_j^i \rfloor, \\ x_j &\geq \lceil x_j^i \rceil = \lfloor x_j^i \rfloor + 1. \end{aligned}$$

- Además de la restricción característica de cada nodo, el hijo hereda las demás restricciones del padre.

En el ejemplo anterior, para la solución del nodo 3 (del problema asociado al nodo 3) están las restricciones originales, la restricción $x_1 \geq 5$, heredada de 2 y la restricción específica $x_2 \leq 3$.

Supongamos que P_e tiene solución finita y que z^* es el valor óptimo de z . Siempre se puede considerar que se conoce \bar{z} , una cota superior para z^* . Inicialmente, $\bar{z} = +\infty$. Cuando se encuentra, durante el proceso, un nodo con solución entera, se actualiza el valor de \bar{z} .

Así, en el ejemplo, cuando se obtiene la solución del nodo 1, entonces $\bar{z} = 50$. Con la solución del nodo 3, $\bar{z} = 48$. La solución del nodo 4 no mejora el valor de z .

En la solución del nodo 0, $z^0 = 136/3 = 45 + 1/3$. La solución del nodo 0 no es entera, eso quiere decir, que se tiene \underline{z} , **una cota inferior** para z^* , ya que el mejor valor de z que podría tener cualquier descendiente entero del nodo 0 sería

$$\underline{z} = \lceil z^0 \rceil = 46.$$

El mismo razonamiento aplicado a otros nodos permite deducir resultados y reglas para el MRA.

- Si el nodo i tiene solución no entera y

$$\lceil z^i \rceil \geq \bar{z} \text{ actual},$$

entonces el nodo es descartado y no bifurca.

- Si el nodo i ya fue creado pero no estudiado, aunque no se conoce z^i , entonces

$$\lceil z^i \rceil \geq \lceil z(\text{padre}(i)) \rceil$$

- Si el nodo i ya fue creado pero no estudiado y

$$\lceil z(\text{padre}(i)) \rceil \geq \bar{z} \text{ actual},$$

entonces el nodo i se descarta y no es necesario resolverlo (obviamente no podrá bifurcar).

Ejemplo 2.8.

$$\begin{aligned} \min \quad & z = 11x_1 + 20x_2 + 15x_3 \\ \text{s.t.} \quad & 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \geq 17 \\ & x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 7 \\ & x \in \mathbb{Z}_+^n \end{aligned}$$

$$x_2 = \frac{15}{4} = 3.75 \quad (0.8, 1.3, 2.3) / 5$$

A continuación aparece el orden en que fueron estudiados los nodos.

Nodo 0:

$$\begin{aligned} x^0 &= [0 \quad 4/5 \quad 23/5]^T, \\ z^0 &= 85, \quad \lceil z^0 \rceil = 85. \end{aligned}$$

Bifurca la variable x_2 para dar origen al nodo 1 con $x_2 \geq 1$ y al 2 con $x_2 \leq 0$.

Nodo 1:

$$\begin{aligned}x^1 &= [0 \ 1 \ 13/3]^T, \\z^1 &= 85, \quad \lceil z^1 \rceil = 85.\end{aligned}$$

Bifurca la variable x_3 para dar origen al nodo 3 con $x_3 \geq 5$ y al 4 con $x_3 \leq 4$.

Nodo 3:

$$\begin{aligned}x^3 &= [0 \ 1 \ 5]^T, \\z^3 &= 95, \quad \bar{z} = 95.\end{aligned}$$

La solución es entera y no hay bifurcación.

Nodo 4:

$$\begin{aligned}x^4 &= [0 \ 5/4 \ 4]^T, \\z^4 &= 85, \quad \lceil z^4 \rceil = 85.\end{aligned}$$

Bifurca la variable x_2 para dar origen al nodo 5 con $x_2 \geq 2$ y al 6 con $x_2 \leq 1$.

Nodo 5:

$$\begin{aligned}x^5 &= [0 \ 2 \ 3]^T, \\z^5 &= 85, \quad \bar{z} = 85.\end{aligned}$$

La solución es entera y no hay bifurcación. Además los nodos 2 y 6, todavía no estudiados, no pueden dar lugar a puntos mejores que el mejor punto entero actual, luego son descartados. Ya no quedan nodos por estudiar, luego la solución es el mejor punto entero hallado,

$$\begin{aligned}x^* &= [0 \ 2 \ 3]^T, \\z^* &= 85. \quad \diamond\end{aligned}$$

2.2.1. Escogencia de la variable que bifurca

Hay criterios para escoger, cuando hay más de una variable no entera en la solución del nodo i , la variable que bifurca. Algunos de ellos son claramente contradictorios.

- La primera variable no entera encontrada, o sea, la variable no entera de subíndice menor.
- La variable no entera de mayor parte fraccionaria.
- La variable no entera “menos entera” [Wol98] y [NeWo99], es decir la variable más alejada de los dos enteros que la rodean, o lo que es lo mismo, la variable cuya parte fraccionaria está más cerca de 1/2. Se bifurca con x_j si

$$\begin{aligned}\delta_k &= \min\{\{x_k^i\}, 1 - \{x_k^i\}\} \\ \delta_j &= \max\{\delta_k : x_k^i \notin \mathbb{Z}\}.\end{aligned}$$

Mientras no haya confusión, se utilizará la notación

$$f_k^i = \{x_k^i\}.$$

Entonces

$$\begin{aligned}\delta_k &= \min\{f_k^i, 1 - f_k^i\} \\ \delta_j &= \max\{\delta_k : x_k^i \notin \mathbb{Z}\}.\end{aligned}$$

- La variable no entera más cercana a un entero [Rar98]. Se bifurca con x_j si

$$\begin{aligned}\delta_k &= \min\{f_k^i, 1 - f_k^i\} \\ \delta_j &= \min\{\delta_k : x_k^i \notin \mathbb{Z}\}.\end{aligned}$$

- La variable no entera que podría dar lugar más fácilmente a descarte por cota [NeWo99]. Se bifurca con x_j si

$$\begin{aligned}\Delta_k &= \max\{f_k^i, 1 - f_k^i\} \\ \Delta_j &= \max\{\Delta_k : x_k^i \notin \mathbb{Z}\}.\end{aligned}$$

Consideremos, en el ejemplo anterior, la solución del nodo 0:

$$\begin{aligned}x^0 &= [0 \quad 4/5 \quad 23/5]^T, \\ \delta_2 &= \min\{4/5, 1/5\}, \\ \delta_2 &= 1/5, \\ \delta_3 &= \min\{3/5, 2/5\}, \\ \delta_3 &= 2/5.\end{aligned}$$

Si se escoge la primera variable no entera, se usaría x_2 . Si se escoge la variable de mayor parte fraccionaria, se usaría x_2 . Si se escoge la variable menos entera, se usaría x_3 . Si se escoge la variable más cercana a un entero, se usaría x_2 .

2.2.2. Escogencia del nodo

Después de estudiar un nodo, se pueden presentar tres casos:

- La solución no es entera, se escoge una variable para bifurcar y se crean dos nodos hijos.
- La solución es entera, se actualiza \bar{z} y se descarta el nodo
- No hay solución y se descarta el nodo,

De todas maneras se requiere escoger el siguiente nodo a estudiar. Para escogerlo hay dos políticas diferentes: *en profundidad* y *a lo ancho*. Para estas dos políticas, así como para los diferentes criterios que se pueden usar en el MRA, no hay demostraciones que garanticen que un criterio sea mejor que el otro. Simplemente hay justificaciones “razonables” a favor de cada criterio. Además, un criterio, después de resolver muchos problemas, puede haber mostrado mayor eficiencia para un tipo de problemas y ser peor para otro tipo de problemas.

Cuando se utiliza la escogencia en profundidad, después de estudiar un nodo con solución no entera, siempre se estudia en seguida uno de sus hijos. Por otro lado, si el nodo es descartado (solución entera o problema sin solución) se estudia enseguida su hermano, si éste no ha sido estudiado.

Cuando la escogencia se hace a lo ancho, el siguiente nodo es el menos profundo entre los no estudiados y no descartados.

En el ejemplo anterior, la escogencia se hizo en profundidad. Después del nodo 1 se estudió uno de sus hijos. Después del nodo 4 se estudió uno de sus hijos, el nodo 5.

Si en este mismo ejemplo la escogencia fuera a lo ancho, después de estudiar el nodo 1 se estudiaría el nodo 2.

Hay dos razones importantes para escoger en profundidad el siguiente nodo [Wol98]:

- Para disminuir el número de nodos a estudiar, es decir, el número de problemas de OL, parece conveniente obtener pronto un punto entero factible, con la esperanza de que provea una buena cota superior para z .
- Desde el punto de vista computacional, se puede lograr mayor eficiencia, cuando a partir de la tabla óptima del nodo padre, se busca la solución del nodo hijo, donde simplemente se agregó una restricción adicional (método simplex dual).

Otra idea útil que puede ayudar a disminuir el número de nodos a resolver, consiste en escoger el **mejor nodo**, es decir, el nodo que tenga un mejor valor posible de z , o sea, el nodo no estudiado, cuyo padre tenga el valor de z más pequeño.

Otra técnica usada es la escogencia en profundidad con *vuelta hacia atrás* (“backtracking”). También es llamada LIFO (“last in, first out”). En esta técnica cuando un nodo es descartado (por solución entera, por inadmisibilidad o por cota), se busca, si lo hay, recorriendo el camino desde el nodo descartado hasta la raíz, el primer nodo que tenga un hijo no estudiado. Este hijo será el nodo a estudiar. En el siguiente árbol se observa la aplicación de esta técnica. El símbolo \times indica un nodo descartado. Los nodos fueron estudiados en el orden i, ii, iii, \dots



Las estrategias también se pueden combinar. Por ejemplo, es razonable usar al comienzo, únicamente la estrategia de profundidad, hasta encontrar un punto entero factible. Después se puede utilizar la estrategia del mejor nodo combinada con la escogencia en profundidad.

2.2.3. Escogencia de la rama

Bien sea que se usa la estrategia en profundidad o la estrategia a lo ancho u otra estrategia, algunas veces hay que escoger entre dos hermanos, es decir, se necesita escoger una de las dos ramas.

Hay criterios arbitrarios, por ejemplo, siempre se escoge primero la rama $x_j \leq \dots$, o siempre se escoge primero la rama $x_j \geq \dots$.

Hay otros criterios que están relacionados con la escogencia de la variable que bifurca. Por ejemplo, supongamos que se escoge para bifurcar la variable menos entera. Entonces, al mismo tiempo se puede escoger la rama que hace que esa variable sea menos entera:

$$\text{rama} = \begin{cases} x_j \leq \lfloor x_j^i \rfloor & \text{si } \delta_j = \{x_j^i\} \leq 1 - \{x_j^i\}, \\ x_j \geq \lceil x_j^i \rceil & \text{si } \delta_j = 1 - \{x_j^i\} > \{x_j^i\}. \end{cases}$$

Al considerar la solución del nodo 0 del ejemplo 2.8

$$\delta_2 = \min\{4/5, 1/5\},$$

$$\begin{aligned}\delta_2 &= 1/5, \\ \delta_3 &= \min\{3/5, 2/5\}, \\ \delta_3 &= 2/5, \\ \delta_j &= \delta_3.\end{aligned}$$

Entonces se debería escoger primero la rama $x_3 \geq 5$.

Hay un criterio más sofisticado que permite al mismo tiempo determinar la variable que bifurca y la rama que se debe estudiar primero.

Sea z^i el valor de z en la solución del nodo i y z_k^{i-} el valor de z en el problema obtenido al agregar al nodo i la restricción $x_k \leq \lfloor x_k^i \rfloor$, suponiendo que el nuevo problema tiene solución. De manera análoga, sea z_k^{i+} el valor de z en el problema obtenido al agregar al nodo i la restricción $x_k \geq \lceil x_k^i \rceil$, suponiendo que el nuevo problema tiene solución. Si uno de los nuevos problema no tiene solución, se considera que el valor de z es $+\infty$.

Como el conjunto factible de cada uno de los nuevos problemas es más pequeño, entonces

$$\begin{aligned}z^i &\leq z_k^{i-} \\ z^i &\leq z_k^{i+}\end{aligned}$$

Sean

$$\begin{aligned}\Delta_k^-(z) &= z_k^{i-} - z^i, \\ \Delta_k^+(z) &= z_k^{i+} - z^i.\end{aligned}$$

Al buscar

$$\max_k \min\{ \Delta_k^-(z), \Delta_k^+(z) \}$$

quedan determinadas la variable que bifurca y la rama que se debe estudiar primero.

Ejemplo 2.9.

$$\begin{aligned}\min z &= 11x_1 + 20x_2 + 14x_3 \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 &\geq 17 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 &\geq 7 \\ x &\in \mathbb{Z}_+^n\end{aligned}$$

Al resolver la relajación lineal:

$$\begin{aligned} x^0 &= [0 \quad 4/5 \quad 23/5]^T \\ z^0 &= 402/5 \end{aligned}$$

Para calcular los valores $\Delta_k(z)$ se puede aplicar el simplex dual utilizando la última tabla.

$$\begin{array}{ccccccc} x_3 & 2/5 & 0 & 1 & -3/5 & 4/5 & 23/5 \\ x_2 & 1/5 & 1 & 0 & 1/5 & -3/5 & 4/5 \\ -z & 7/5 & 0 & 0 & 22/5 & 4/5 & -402/5 \end{array}$$

Al agregar la restricción $x_2 \leq 0$, después de introducir una variable de holgura, se tiene

$$x_2 + x_6 = 0.$$

Esto hace agregar una fila y columna a la tabla:

$$\begin{array}{ccccccccc} x_3 & 2/5 & 0 & 1 & -3/5 & 4/5 & 0 & 23/5 \\ x_2 & 1/5 & 1 & 0 & 1/5 & -3/5 & 0 & 4/5 \\ x_6 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -z & 7/5 & 0 & 0 & 22/5 & 4/5 & 0 & -402/5 \end{array}$$

Para obtener la matriz identidad 3×3 , basta con restar a la tercera fila, la segunda fila.

$$\begin{array}{ccccccccc} x_3 & 2/5 & 0 & 1 & -3/5 & 4/5 & 0 & 23/5 \\ x_2 & 1/5 & 1 & 0 & 1/5 & -3/5 & 0 & 4/5 \\ x_6 & -1/5 & 0 & 0 & -1/5 & 3/5 & 1 & -4/5 \\ -z & 7/5 & 0 & 0 & 22/5 & 4/5 & 0 & -402/5 \end{array}$$

El método simplex dual puede empezar. Sale la tercera variable básica, $x_{\beta_\sigma} = x_{\beta_3} = x_6$. Para escoger la variable que entra es necesario buscar

$$\begin{aligned} \max\left\{\frac{\tilde{c}_j}{a_{\sigma j}} : a_{\sigma j} < 0\right\} \\ \max\left\{\frac{7/5}{-1/5}, \frac{22/5}{-1/5}\right\} = -7 \end{aligned}$$

Entonces entra x_1 y la nueva tabla es factible (y óptima).

x_3	0	0	1	-1	2	2	3
x_2	0	1	0	0	0	1	0
x_1	1	0	0	1	-3	-5	4
$-z$	0	0	0	3	5	7	-86

Entonces $\Delta_2^-(z) = 86 - 402/5 = 28/5$. Realmente no es necesario calcular completa la nueva tabla para obtener $\Delta_2^-(z)$. Basta con efectuar el producto $7 \times 4/5$. De manera general, para calcular $\Delta_k^-(z)$, basta con

$$\begin{aligned} x_{\beta_q} &= x_k^i, \\ p^- &= \min_j \left\{ \frac{\tilde{c}_j}{a_{qj}} : x_j \text{ es libre y } a_{qj} > 0 \right\}, \\ \Delta_k^-(z) &= p^- \{x_k^i\}. \end{aligned}$$

Al agregar al problema inicial la restricción $x_2 \geq 1$, después de introducir una variable de holgura, se tiene

$$\begin{aligned} x_2 - x_6 &= 1 \\ -x_2 + x_6 &= -1 \end{aligned}$$

Esto hace agregar una fila y columna a la tabla:

x_3	2/5	0	1	-3/5	4/5	0	23/5
x_2	1/5	1	0	1/5	-3/5	0	4/5
x_6	0	-1	0	0	0	1	-1
$-z$	7/5	0	0	22/5	4/5	0	-402/5

Para obtener la matriz identidad 3×3 , basta con sumar a la tercera fila, la segunda fila.

x_3	2/5	0	1	-3/5	4/5	0	23/5
x_2	1/5	1	0	1/5	-3/5	0	4/5
x_6	1/5	0	0	1/5	-3/5	1	-1/5
$-z$	7/5	0	0	22/5	4/5	0	-402/5

El método simplex dual puede empezar. Sale la tercera variable básica, $x_{\beta_\sigma} = x_{\beta_3} = x_6$. Para escoger la variable que entra es necesario buscar

$$\max\left\{\frac{\tilde{c}_j}{a_{\sigma j}} : a_{\sigma j} < 0\right\}$$

$$\max\left\{ \frac{4/5}{-3/5} \right\} = -4/3$$

Entonces entra x_5 y la nueva tabla es factible (y óptima).

$$\begin{array}{ccccccccc} x_3 & 2/3 & 0 & 1 & -1/3 & 0 & 4/3 & 13/3 \\ x_2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ x_5 & -1/3 & 0 & 0 & -1/3 & 1 & -5/3 & 1/3 \\ -z & 5/3 & 0 & 0 & 14/3 & 0 & 4/3 & -242/3 \end{array}$$

Entonces $\Delta_2^+(z) = 242/3 - 402/5 = 4/15$. De nuevo, realmente no es necesario calcular completa la nueva tabla para obtener $\Delta_2^+(z)$. Basta con efectuar el producto $4/3 \times 1/5$. De manera general, para calcular $\Delta_k^+(z)$, basta con

$$x_{\beta_q} = x_k^i,$$

$$p^+ = \min_j \left\{ \frac{\tilde{c}_j}{-a_{qj}} : x_j \text{ es libre y } a_{qj} < 0 \right\},$$

$$\Delta_k^+(z) = p^+ (1 - \{x_k^i\}).$$

Procediendo de manera análoga con la variable x_3 ,

$$p^- = \min\left\{\frac{7/5}{2/5}, \frac{4/5}{4/5}\right\} = 1,$$

$$\Delta_3^-(z) = (1)(3/5) = 3/5,$$

$$p^+ = \min\left\{\frac{22/5}{-3/5}\right\} = 22/3,$$

$$\Delta_3^+(z) = (22/3)(1 - 3/5) = 44/15.$$

Entonces

$$\max_k \min\{ \Delta_k^-(z), \Delta_k^+(z) \} = \max\{ \min\{28/5, 4/15\}, \min\{3/5, 44/15\} \}$$

$$= \max\{4/15, 3/5\}$$

$$= 3/5.$$

Según el criterio, conocido a veces con el nombre de penalización, se debería bifurcar con la variable x_3 y estudiar primero la rama $x_3 \leq 4$.

Este criterio se utilizó bastante en software para OE, pero, en problemas grandes, la práctica muestra que los cálculos no se justifican [NeWo99].

Ejemplo 2.10. Resolver el siguiente problema utilizando las siguientes opciones: bifurcación sobre la variable menos entera; escogencia del nodo según la técnica LIFO, mientras no haya puntos enteros conocidos; escogencia del mejor nodo cuando ya se conoce un punto entero.

$$\begin{aligned} \max \ z &= 15x_1 - 7x_2 \\ 3x_1 + 5x_2 &\leq 40 \\ 8x_1 - 6x_2 &\leq 63 \\ x &\in \mathbb{Z}_+^n \end{aligned}$$

Convertido al formato usual:

$$\begin{aligned} \min \ z &= -15x_1 + 7x_2 \\ 3x_1 + 5x_2 &\leq 40 \\ 8x_1 - 6x_2 &\leq 63 \\ x &\in \mathbb{Z}_+^n \end{aligned}$$

$$x_1 = 555/58, x_2 = 131/58$$

Los detalles de la solución, algunos ya están en el árbol, son los siguientes:

$$\begin{aligned} x^0 &= [555/58 \quad 131/58]^T \\ z^0 &= -3704/29, \quad \lceil z \rceil = -127 \\ f_1^0 &= 33/58, \quad 1 - f_1^0 = 25/58, \quad \delta_1 = 25/58 \\ f_2^0 &= 15/58, \quad 1 - f_2^0 = 43/58, \quad \delta_2 = 15/58 \\ \delta_j &= \delta_1, \quad x_1 \geq 10, \quad x_1 \leq 9 \end{aligned}$$

$F'_1 = \emptyset$, se descarta el nodo 1,
por LIFO se escoge el nodo 2,

$$\begin{aligned} x^2 &= [9 \quad 3/2]^T \\ z^2 &= -249/2, \quad \lceil z \rceil = -124 \end{aligned}$$

$$f_1^2 = 1/2, \quad 1 - f_2^2 = 1/2, \quad \delta_2 = 1/2$$

$$\delta_j = \delta_2, \quad x_2 \leq 1, \quad x_2 \geq 2$$

$$x^3 = [69/8 \quad 1]^T$$

$$z^3 = -979/8, \quad \lceil z \rceil = -122$$

$$f_1^3 = 5/8, \quad 1 - f_1^3 = 3/8, \quad \delta_1 = 3/8$$

$$\delta_j = \delta_1, \quad x_1 \geq 9, \quad x_1 \leq 8$$

$F'_5 = \emptyset$, se descarta el nodo 5,
por LIFO se escoge el nodo 6,

$$x^6 = [8 \quad 1/6]^T$$

$$z^6 = -713/6, \quad \lceil z \rceil = -118$$

$$f_2^6 = 1/6, \quad 1 - f_2^6 = 5/6, \quad \delta_2 = 1/6$$

$$\delta_j = \delta_2, \quad x_2 \leq 0, \quad x_2 \geq 1$$

$$x^7 = [63/8 \quad 0]^T$$

$$z^7 = -945/8, \quad \lceil z \rceil = -118$$

$$f_1^7 = 7/8, \quad 1 - f_1^7 = 1/8, \quad \delta_1 = 1/8$$

$$\delta_j = \delta_1, \quad x_1 \geq 8, \quad x_1 \leq 7$$

$F'_9 = \emptyset$, se descarta el nodo 9,
por LIFO se escoge el nodo 10,

$$x^{10} = [7 \quad 0]^T, \quad z^{10} = -105,$$

primer punto entero, se escoge el mejor nodo: el 4,

$$x^4 = [9 \quad 2]^T, \quad z^{10} = -121,$$

nuevo mejor punto entero,
se descarta el nodo 8 por cota,
no hay nodos activos.

Entonces la (una) solución es

$$\begin{aligned} x^* &= [9 \quad 2]^T, \\ z^* &= -121. \quad \diamond \end{aligned}$$

2.2.4. Aproximaciones

Cuando el punto x^i , solución del nodo i , no es entero, se pueden construir fácilmente tres aproximaciones, una por redondeo, otra por parte entera inferior y otra por parte entera superior. Sea \tilde{t} el valor entero obtenido al redondear t ,

$$\begin{aligned} \tilde{x}^i &= [\tilde{x}_1^i \quad \tilde{x}_2^i \quad \cdots \quad \tilde{x}_n^i]^T, \\ \lfloor x^i \rfloor &= [\lfloor x_1^i \rfloor \quad \lfloor x_2^i \rfloor \quad \cdots \quad \lfloor x_n^i \rfloor]^T, \\ \lceil x^i \rceil &= [\lceil x_1^i \rceil \quad \lceil x_2^i \rceil \quad \cdots \quad \lceil x_n^i \rceil]^T. \end{aligned}$$

En seguida se averigua si son puntos factibles, y si lo son, se puede saber si son mejores que el mejor punto entero obtenido. Los tres pasos requeridos (construir las aproximaciones, averiguar si son factibles y comparar con el mejor punto actual) requieren pocas operaciones y pueden disminuir el número total de nodos o el número de utilizaciones del simplex.

Ejemplo 2.11. Resolver el problema del ejemplo anterior, con los mismos criterios, agregando la construcción de las aproximaciones.

$$\begin{aligned} \max z &= 15x_1 - 7x_2 \\ 3x_1 + 5x_2 &\leq 40 \\ 8x_1 - 6x_2 &\leq 63 \\ x &\in \mathbb{Z}_+^n \end{aligned}$$

En el formato usual:

$$\begin{aligned} \min z &= -15x_1 + 7x_2 \\ 3x_1 + 5x_2 &\leq 40 \\ 8x_1 - 6x_2 &\leq 63 \\ x &\in \mathbb{Z}_+^n \end{aligned}$$

$$x_1 \leq 16, \quad x_2 \leq 18, \quad x_3 \leq 13, \quad x_1 + x_2 + x_3 \leq 23$$

Ejercicios

2.1 Resuelva

$$\begin{aligned} \min \quad & z = 7x_1 + 13x_2 + 15x_3 \\ \text{s.t.} \quad & 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 \geq 23 \\ & x_1 + x_2 + x_3 \geq 3 \\ & x \in \mathbb{Z}_+^n \end{aligned}$$

Utilice el método de Gomory y el de bifurcación y acotamiento. Emplee varios criterios.

Respuesta: $x = (0, 2, 3)$, $z = 71$.

2.2 Resuelva

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 17x_1 + 13x_2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + 3x_2 \leq 11 \\ & 9x_1 + 5x_2 \leq 19 \\ & x \in \mathbb{Z}_+^n \end{aligned}$$

Utilice el método de Gomory y el de bifurcación y acotamiento. Emplee varios criterios.

Respuesta: $x = (1, 2)$, $z = 43$.

2.3 Resuelva

$$\begin{aligned}
 \min \quad & z = 2x_1 + 3x_2 \\
 \text{subject to} \quad & 10x_1 + 11x_2 \leq 29 \\
 & 13x_1 + 12x_2 \geq 27 \\
 & x_1 \leq 2 \\
 & x_2 \leq 2, \\
 & x \in \mathbb{Z}_+^n
 \end{aligned}$$

Utilice el método de Gomory y el de bifurcación y acotamiento. Emplee varios criterios.

Respuesta: no hay puntos factibles.

2.4 Resuelva

$$\begin{aligned}
 \max \quad & z = 12x_1 + 10x_2 + 11x_3 \\
 \text{subject to} \quad & 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \geq 23 \\
 & 7x_1 + 6x_2 + 5x_3 \leq 83 \\
 & x \in \mathbb{Z}_+^n
 \end{aligned}$$

Utilice el método de Gomory y el de bifurcación y acotamiento. Emplee varios criterios.

Respuesta: $x = (1, 0, 15)$, $z = 177$.

2.5 Resuelva

$$\begin{aligned}
 \max \quad & z = 8x_1 + 13x_2 + 23x_3 + 31x_4 \\
 \text{subject to} \quad & 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 11x_4 \leq 61 \\
 & x \in \mathbb{Z}_+^n
 \end{aligned}$$

Utilice el método de Gomory y el de bifurcación y acotamiento. Emplee varios criterios.

Respuesta: $x = (0, 1, 8, 0)$, $z = 197$.

2.6 Resuelva

$$\begin{aligned}
 \min \quad & z = 12x_1 + 5x_2 + 14x_3 + 7x_4 \\
 \text{subject to} \quad & 6x_1 + 5x_2 + 16x_3 + 3x_4 \geq 7 \\
 & x_i \in \{0, 1\}, \quad \forall i.
 \end{aligned}$$

Utilice el método de Gomory y el de bifurcación y acotamiento. Emplee varios criterios.

Respuesta: $x = (0, 1, 0, 1)$, $z = 12$.

Capítulo 3

Optimización en grafos

3.1. Conceptos iniciales

Un p -grafo está formado por un conjunto no vacío y finito de vértices, y por un conjunto finito de arcos o flechas, donde cada arco va de un vértice a otro vértice y, por mucho, hay p arcos entre un vértice y otro.



Figura 3.1.

Esta figura muestra un 3-grafo. Sus vértices son $1, a, 4, \alpha$ y x . Tiene 9 flechas.

De manera más formal, un p -grafo G es una tripla $G = (V, A, f)$, donde

- $V \neq \emptyset$ finito, es el conjunto de *vértices* o *nodos*,
- A finito, es el conjunto de *arcos* o *flechas*,

- $f : A \rightarrow V \times V$, tal que

$$\max\{ |f^{-1}(i, j)| : (i, j) \in f(A) \} = p.$$

La función f asigna a un arco una pareja (i, j) para indicar que la flecha arranca de i y llega a j . En el ejemplo de la figura 3.1, $f(u) = (4, 1)$, ya que la flecha u va de 4 hacia 1. La imagen inversa de la pareja de vértices $(1, a)$ es el conjunto $\{c\}$, es decir, es el conjunto de flechas que van desde 1 hasta a . La imagen inversa de la pareja de vértices $(1, 4)$ es el conjunto $\{q, r, s\}$, es decir, es el conjunto de flechas que van desde 1 hasta 4. Como no hay imágenes inversas con más de 3 elementos y hay una con 3 elementos, entonces se tiene un 3-grafo.

3.1.1. Grafos dirigidos

Cuando $p = 1$ se tiene un *1-grafo*, *grafo*, *grafo dirigido* o *digrafo*. En algunos libros, *grafo* es diferente de *digrafo*. En este documento, **grafo es exactamente lo mismo que digrafo**.

Como en un grafo hay a lo más una flecha de un nodo a otro nodo, entonces se puede representar, sin ambigüedad, la flecha que va del nodo i al nodo j por la pareja (i, j) .

Un *grafo* se puede representar por una pareja $G = (V, A)$, donde

- $V \neq \emptyset$ finito, es el conjunto de vértices,
- $A \subseteq V \times V$ es el conjunto de arcos.

4

Figura 3.2.

En el grafo de la figura anterior,

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\},$$

$$A = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 5), (4, 5), (4, 6), (5, 7), (7, 6)\}.$$

En muchas de las aplicaciones de los grafos, *un p-grafo se puede convertir en un grafo*, introduciendo vértices ficticios cada vez que haya más de un arco entre dos vértices.

En un grafo, un arco de la forma (i, i) se llama un *bucle*. En el 3-grafo de la figura 3.1, el arco w es un bucle.

Si en un *p*-grafo, las flechas no tienen dirección, se tiene un *multigrafo*, y las “flechas” reciben el nombre de *aristas*.

Denotemos por $\wp_k(X)$ el conjunto de subconjuntos de X de k elementos y por $\wp_{ks}(X) = \wp_k(X) \cup \wp_s(X)$.

Un multigrafo se puede representar por una tripla $G = (V, E, g)$, donde

- V es el conjunto de vértices,
- E es el conjunto de aristas,
- $g : E \rightarrow \wp_{12}(V)$.

En un multigrafo, una arista une 2 vértices o une un vértice consigo mismo. La función g evaluada en una arista a , es decir $g(a)$, indica cuáles vértices une la arista a .

Un grafo es *simétrico* si $(i, j) \in A \Rightarrow (j, i) \in A$. Un grafo es *antisimétrico* si $(i, j) \in A \Rightarrow (j, i) \notin A$.

Si en un grafo antisimétrico sin bucles, las flechas se convierten en aristas, se tiene un *grafo simple*. Un grafo simple se puede representar por un paréntesis $G = (V, E)$, donde V es el conjunto de vértices, $E \subseteq \wp_2(V)$ es el conjunto de aristas. O sea, la arista que une el vértice i y el vértice j se puede representar por el conjunto $\{i, j\}$.

Un *grafo simple* es equivalente a un *grafo simétrico sin bucles*. O sea, si en un grafo, siempre que hay un arco (i, j) también está el arco (j, i) , entonces se pueden representar las dos flechas (i, j) , (j, i) por la línea o arista $\{i, j\}$.

De aquí en adelante, mientras no se diga lo contrario, se supone que:

- $p = 1$, es decir, todo se refiere a grafos.
- El número de vértices es n , o sea, $|V| = n$.
- El número de arcos es m , o sea, $|A| = m$.
- $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, o de manera más sencilla, $V = \{1, 2, \dots, n\}$.

Si $(i, j) \in A$, se dice que i es el *origen* del arco, j es el *destino* del arco, i es *predecesor* o *antecesor* de j , j es *sucesor* de i .

Se denota por

$$P(i) = \Gamma_i^- = \Gamma^-(i) = \{k \in V : (k, i) \in A\}$$

el conjunto de predecesores de i y por

$$S(i) = \Gamma_i^+ = \Gamma^+(i) = \{j \in V : (i, j) \in A\}$$

el conjunto de sucesores de i .

En el grafo de la figura 3.2, $\Gamma^+(2) = \{3, 4, 5\}$, $\Gamma^-(2) = \{1\}$, $\Gamma^+(6) = \emptyset$.

El *diccionario de sucesores* es la lista de los conjuntos de sucesores de todos los nodos. Es otra manera de representar o de tener información sobre un grafo. De manera análoga, un grafo se puede representar por el diccionario de predecesores.

El grafo de la figura 3.2 se puede representar por su diccionario de sucesores:

i	$\Gamma^+(i)$
1	2, 3
2	3, 4, 5
3	5
4	5, 6
5	7
6	
7	6

Se denota por $\Gamma_i = \Gamma(i) = \Gamma^-(i) \cup \Gamma^+(i)$ el conjunto de *vecinos* de i .

Si $\Gamma(i) = \emptyset$, se dice que i es *aislado*.

Si $j \neq i$ y $j \in \Gamma(i)$, se dice que j es *adyacente* a i .

Si $U \subseteq V$, se define el conjunto (amplio) de *vecinos* de U

$$\Gamma(U) = \bigcup_{u \in U} \Gamma(u) \setminus U.$$

Si $i \notin U \subseteq V$ y $i \in \Gamma(U)$, se dice que i es *adyacente* a U .

Dos arcos (i, j) , (u, v) son *adyacentes* si tienen algún vértice en común, es decir, si $\{i, j\} \cap \{u, v\} \neq \emptyset$. En particular un arco es adyacente a sí mismo.

Una *cadena* de longitud p es una sucesión de arcos de G $(i_1, j_1), (i_2, j_2), \dots, (i_p, j_p)$ tal que para $k = 2, \dots, p-1$ los arcos $(i_{k-1}, j_{k-1}), (i_k, j_k)$ son adyacentes, y los arcos $(i_k, j_k), (i_{k+1}, j_{k+1})$ también son adyacentes.

Un *ciclo* es una cadena donde el primer arco y el último son adyacentes.

Una *trayectoria*, *camino* o *ruta* de longitud p es una cadena $(i_1, j_1), (i_2, j_2), \dots, (i_p, j_p)$ tal que para $k = 1, \dots, p-1$ el destino de cada arco coincide con el origen del siguiente, es decir, $j_k = i_{k+1}$, o sea, es una sucesión de arcos de G de la forma $(i_1, i_2), (i_2, i_3), \dots, (i_p, i_{p+1})$. Se dice que el camino va de i_1 a $i_{p+1} = j_p$. Este camino también se puede representar simplemente por los vértices: $(i_1, i_2, \dots, i_p, i_{p+1})$. Por convención, (i) , camino formado por un solo vértice, es de longitud 0.

En el grafo de la figura 3.2, $(1, 2, 5, 7)$ y $(1, 2, 4, 5)$ son caminos de longitud 3

Un *círculo* es un camino tal que el primer origen es igual al último destino, o sea, $i_1 = i_{p+1}$.

Si existe un camino de i a j se dice que j es un *descendiente* de i , y que i es un *ascendiente* de j . Un nodo es descendiente y ascendiente de si mismo. Dados dos nodos diferentes i y j , puede suceder que i sea descendiente de j y j descendiente de i .

Un vértice i es una *raíz* del grafo si todos los otros vértices son sus descendientes. Un vértice j es una *antiraíz* del grafo si es descendiente de todos los otros vértices. Un vértice i es una *fuente* del grafo si no tiene predecesores. Un vértice j es un *sumidero* del grafo si no tiene sucesores.

El vértice 1 es raíz del grafo de la figura 3.2 y también es una fuente. El vértice 6 es un sumidero y también antiraíz. En la figura 3.3, el nodo 6 es un sumidero pero no es antiraíz.

Se dice que B es una *base* del grafo $G = (V, A)$ si:

- $B \neq \emptyset$,
- $B \subseteq V$,
- $i, j \in B \Rightarrow (i, j) \notin A, (j, i) \notin A$,
- si $k \notin B$, entonces es descendiente de algún elemento de B .

A continuación, algunos resultados importantes.

- *Siempre existe por lo menos una base.*
- *No siempre existe una raíz.*
- *Una raíz es una base de un elemento en un grafo sin bucles.*

Si en un grafo $G = (V, A)$ se toma $A' \subseteq A$ se tiene un *grafo parcial* $G' = (V, A')$.

La figura 3.3 muestra un grafo parcial del grafo de la figura 3.2. De él se han suprimido los arcos $(2, 3)$, $(4, 5)$ y $(7, 6)$.

Figura 3.3.

Un grafo $H = (U, B)$ es *subgrafo* de $G = (V, A)$ si $U \subseteq V$ y $B \subseteq A$. Como se supone que H es grafo, entonces $B \subseteq U \times U$. Si se toma $U \subseteq V$ y B formado por los arcos de A que están en $U \times U$, se tiene el *subgrafo* (U, B) *generado* por U .

Al tomar, en el grafo de la figura 3.2, el conjunto $U = \{1, 2, 4, 5, 6\}$, es decir, quitando los nodos 3 y 7, se obtiene el subgrafo de la figura 3.4.

Figura 3.4.

Un camino es *elemental* si pasa una sola vez por cada uno de sus vértices.

Un camino es *prehamiltoniano* si pasa por todos los vértices de V .

Un camino prehamiltoniano y elemental se llama *hamiltoniano*.

Un camino es *simple* si no pasa más de una vez por sus arcos.

Un camino es *preeuleriano* si pasa por todos los arcos de A .

Un camino preeuleriano y simple se llama *euleriano*.

Un grafo se puede representar por la matriz asociada al grafo, algunas veces llamada *matriz de incidencia nodo-nodo*. Esta matriz es de tamaño $n \times n$:

$$\begin{aligned} m_{ij} &= 1 && \text{si } (i, j) \in A \\ m_{ij} &= 0 && \text{si } (i, j) \notin A. \end{aligned}$$

La matriz asociada al grafo de la figura 3.2 es:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

También existe la *matriz de incidencia nodo-arco*, también llamada simplemente *matriz de incidencia*. Esta matriz es de tamaño $n \times m$, cada fila corresponde a un nodo, cada columna corresponde a un arco (los arcos deben tener un orden, primer arco, segundo, ...).

$$\begin{aligned} \mu_{ik} &= 1 && \text{si } i \text{ es origen o destino del } k\text{-ésimo arco,} \\ \mu_{ik} &= 0 && \text{en caso contrario.} \end{aligned}$$

Para el grafo de la figura 3.2, tomando los arcos en el orden $A = \{ (1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 5), (4, 5), (4, 6), (5, 7), (7, 6) \}$, la matriz de incidencia nodo-arco es:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matriz de incidencia no contiene toda la información sobre un grafo dirigido, en cambio un grafo no dirigido se puede representar perfectamente por su matriz de incidencia.

3.1.2. Detección de descendientes de un nodo

El siguiente algoritmo, muy sencillo, permite conocer los descendientes de un nodo a . Como caso particular permite saber si a es raíz del grafo.

- Marcar el nodo a .
- Marcar los sucesores de todos los nodos marcados.
- Repetir el proceso hasta que no haya nuevos nodos marcados.

Al final todos los nodos marcados, diferentes de a , son descendientes de a . Sea p una variable que indica el número de nodos marcados en una iteración y $\mu \in \{0, 1, 2\}^n$ definido por

$$\mu_i = \begin{cases} 0 & \text{si el nodo } i \text{ no está marcado,} \\ 1 & \text{si el nodo } i \text{ está marcado, pero no sus sucesores,} \\ 2 & \text{si el nodo } i \text{ está marcado y sus sucesores también.} \end{cases}$$

DESCENDIENTES DE UN NODO

```

datos: :  $V, A, a$ 
 $\mu \leftarrow 0$ 
 $\mu_a \leftarrow 1$ 
 $p \leftarrow 1$ 
mientras  $p > 0$  y  $\min\{\mu_i\} = 0$ 
     $p \leftarrow 0$ 
    para  $i = 1 : n$ 
        si  $\mu_i = 1$ 
            para  $j \in \Gamma^+(i)$ 
                si  $\mu_j = 0$  ent
                     $\mu_j = 1$ 
                     $p \leftarrow p + 1$ 
                fin-si
            fin-para
             $\mu_i \leftarrow 2$ 
        fin-si
    fin-para
fin-mientras
 $\mu_a \leftarrow 0$ 

```

A la salida del algoritmo anterior, todos los nodos marcados, $\mu_i \geq 1$, son descendientes de a .

Ejemplo 3.1. Hallar los descendientes de 1 en el grafo de la figura 3.5.

3

Figura 3.5.

Su diccionario de sucesores es:

i	$\Gamma^+(i)$
1	2, 3
2	3, 4, 5
3	5
4	5, 6
5	7
6	
7	6

El proceso de marcación es el siguiente: Marcación de 1 y de sus sucesores 2 y 3.

$$1^2, 2^1, 3^1, 4, 5, 6, 7$$

Sucesores de 2: nodos marcados: 4, 5.

$$1^2, 2^2, 3^1, 4^1, 5^1, 6, 7$$

Sucesores de 3: ningún nodo marcado.

$$1^2, 2^2, 3^2, 4^1, 5^1, 6, 7$$

Sucesores de 4: nodos marcados: 6.

$$1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^1, 6^1, 7$$

Sucesores de 5: nodos marcados: 7.

$$1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^1, 7^1$$

6 no tiene sucesores.

$$1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2, 7^1$$

Sucesores de 7: ningún nodo marcado.

$$1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^1, 7^2$$

$p = 6$ pero para todos los nodos $\mu_i \geq 1$. Entonces se acaba el proceso iterativo, $\mu_1 \leftarrow 0$. Así todos los nodos, diferentes de 1, son descendientes de 1, luego 1 es una raíz. \diamond

Ejemplo 3.2. Hallar los descendientes de 2 en el grafo del ejemplo anterior.

Sucesores de 2: nodos marcados: 3, 4, 5.

$$1, 2^2, 3^1, 4^1, 5^1, 6, 7$$

Sucesores de 3: ningún nodo marcado.

$$1, 2^2, 3^2, 4^1, 5^1, 6, 7$$

Sucesores de 4: nodos marcados: 6.

$$1, 2^2, 3^2, 4^2, 5^1, 6^1, 7$$

Sucesores de 5: nodos marcados: 7

$$1, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^1, 7^1$$

6 no tiene sucesores.

$$1, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2, 7^1$$

Sucesores de 7: ningún nodo marcado.

$$1, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2, 7^2$$

$p = 5$, se empieza una nueva iteración.

En esta nueva iteración $p = 0$, luego los descendientes de 2 son : 3, 4, 5, 6, 7. \diamond

3.1.3. Detección de un circuito

Cuando se desea saber si un grafo $G = (V, A)$ tiene circuitos, se puede utilizar el siguiente algoritmo, el cual utiliza el diccionario de sucesores.

1. Buscar en el diccionario de sucesores, un nodo sin sucesores.
2. Eliminar este nodo de todo el diccionario.
3. Mientras sea posible, repetir los pasos 1 y 2.

El algoritmo anterior acaba de dos formas:

- a) El diccionario quedó “vacío”.
- b) Ya no es posible quitar más nodos.

En el caso a), G no tiene circuitos. En el caso b), con el subgrafo obtenido por los nodos no suprimidos, se obtiene un circuito.

Ejemplo 3.3. Averiguar si el grafo de la figura 3.6 tiene circuitos.

Su diccionario de sucesores es:

4

Figura 3.6.

i	$\Gamma^+(i)$
1	2, 3
2	3, 4, 5
3	5
4	5, 6
5	7
6	
7	6

Suprimir 6.

i	$\Gamma^+(i)$
1	2, 3
2	3, 4, 5
3	5
4	5
5	7
7	

Suprimir 7.

i	$\Gamma^+(i)$
1	2, 3
2	3, 4, 5
3	5
4	5
5	

Suprimir 5.

i	$\Gamma^+(i)$
1	2, 3
2	3, 4
3	
4	

Suprimir 3 y 4.

i	$\Gamma^+(i)$
1	2
2	

Suprimir 2 .

i	$\Gamma^+(i)$
1	

Se suprime el nodo 1, luego se concluye que el grafo no tiene circuitos. \diamond

Ejemplo 3.4. Averiguar si el garfo de la figura 3.7 tiene circuitos.

4

Figura 3.7.

Su diccionario de sucesores es:

i	$\Gamma^+(i)$
1	2, 3
2	3, 4
3	5
4	5, 6
5	2, 7
6	
7	6

Se suprime 6.

i	$\Gamma^+(i)$
1	2, 3
2	3, 4
3	5
4	5
5	2, 7
7	

Se suprime 7.

i	$\Gamma^+(i)$
1	2, 3
2	3, 4
3	5
4	5
5	2

Como no se puede continuar el proceso y el diccionario no está vacío, se puede concluir que hay un circuito. En el subgrafo resultante, figura 3.8, está el circuito $(2, 4, 5, 2)$.

3.1.4. Grafos no dirigidos

Un grafo no dirigido G se puede representar por la pareja (V, E) , donde $V \neq \emptyset$ es el conjunto finito de vértices y $E \subseteq \wp_2(V)$ es el conjunto de aristas.

En un grafo no dirigido se pueden definir algunos de los conceptos vistos para grafos (dirigidos).

3

Figura 3.8.

El vértice j es *vecino de* i o *adyacente a* i si $\{i, j\} \in E$. Se denota por $\Gamma_i = \Gamma(i)$ el conjunto de *vecinos* o de *adyacentes* a i . Dada la definición de $E \subseteq \wp_2(V)$, es claro que $i \notin \Gamma(i)$.

Si $\Gamma(i) = \emptyset$, se dice que i es *aislado*.

Si $U \subseteq V$, se define el conjunto (amplio) de *vecinos* de U

$$\Gamma(U) = \bigcup_{u \in U} \Gamma(u) \setminus U.$$

Dos aristas diferentes $\{i, j\}$, $\{u, v\}$ son *adyacentes* si tienen un vértice en común, es decir, si $\{i, j\} \cap \{u, v\} \neq \emptyset$.

Una *cadena* de longitud p es una sucesión de aristas de G , $\{i_1, j_1\}$, $\{i_2, j_2\}$, ..., $\{i_p, j_p\}$ tal que para $k=1, \dots, p-1$ se cumple $\{i_k, j_k\} \neq \{i_{k+1}, j_{k+1}\}$ y $j_k = i_{k+1}$. En este caso se dice que la cadena une los vértices i_1 y j_p . Es usual representar la cadena por la $(p+1)$ -upla

$$(i_1, i_2, \dots, i_p, j_p)$$

Un grafo no dirigido es *conexo* si para cualquier par de vértices i y j en V , con $i \neq j$, existe una cadena que los une.

Sea $G = (V, E)$ un grafo no dirigido, $U \subseteq V$, H el subgrafo generado por U . Si H es conexo y al agregar a U cualquier vértice, el subgrafo generado no es conexo, se dice que H es la *componente conexa* generada por U . Así, un grafo se puede “dividir” en una o varias componentes conexas.

Un *ciclo* es una cadena $(i_1, i_2, \dots, i_{k+1})$ de longitud $k \geq 3$ donde $i_{k+1} = i_1$.

Un *árbol* es un grafo no dirigido conexo y sin ciclos.

Dado un grafo no dirigido $G = (V, E)$, un *árbol generador* o *árbol de expansión* (“spanning tree”) es un árbol que contiene todos los vértices de G . Este árbol tiene $n - 1$ aristas. *Un grafo es conexo si tiene un árbol generador.*

3.2. Camino más corto

3.2.1. Introducción

Una *red* (dirigida) es un grafo (dirigido) con una función de costo (o de longitud), o sea, es una tripla $R = (V, A, c)$, donde (V, A) es un grafo y c es una función de costo, $c : A \rightarrow \mathbb{R}$. El costo se denota $c(i, j) = c_{ij}$.

Sean $R = (V, A, c)$ una red y $\alpha = (i_1, i_2, \dots, i_p, i_{p+1})$ un camino. Se define el *costo del camino* o *la longitud del camino* como la suma de los costos, es decir,

$$c(\alpha) = \sum_{k=1}^p c(i_k, i_{k+1}).$$

Obsérvese que cuando se tiene una red, la longitud del camino ya no se refiere al número de arcos del camino, la longitud es la suma de costos o distancias. Se puede pensar que un grafo es un caso particular de una red, donde $c_{ij} = 1$ para todo $(i, j) \in A$.

Sean $a, z \in V$, z descendiente de a . Un camino α de a a z es *minimal* o es un camino más corto, si no existe otro camino más corto de a a z . Si existe una ruta más corta de a a z , su costo se llama el costo o distancia entre a y z :

$$c^*(a, z) = \min\{c(\alpha) : \alpha \text{ es un camino de } a \text{ a } z\}.$$

Dados $a, z \in V$, z descendiente de a , el problema del CMC (camino más corto), consiste en obtener, si es posible, $c^*(a, z)$ y un camino α tal que $c^*(a, z) = c(\alpha)$. Aunque a primera vista, siempre debe existir un valor mínimo, esto no siempre es cierto.

Como el CMC únicamente tiene sentido si $a, z \in V$ y z es descendiente de a , entonces basta con considerar el subgrafo generado por a y sus descendientes. Más aún, se puede entonces simplemente **suponer que a es una raíz de R .**

Un circuito α se llama *absorbente* si $c(\alpha) < 0$. Ahora si se puede enunciar, de manera precisa, el resultado que parecía obvio

Si la red no tiene circuitos absorbentes, entonces el problema de CMC tiene solución.

La anterior afirmación es simplemente una condición suficiente, mas no necesaria. Esto quiere decir, que algunas veces, dependiendo de z , puede existir un CMC en presencia de circuitos absorbentes.



Figura 3.9.

En la red de la figura 3.9, no se puede calcular $c^*(1, 5)$ ya que siempre se puede construir un camino cada vez menos largo, por ejemplo,

$$(1, 2, 3, 4, 2, 3, 4, 2, 3, 4, \dots, 2, 3, 4, \dots, 2, 5).$$

En este mismo grafo, aunque hay un circuito absorbente, $c^*(1, 6) = 7$.

Mientras no se diga lo contrario, **supongamos que $R = (V, A, c)$ es una red sin circuitos absorbentes, a es raíz de R .**

Para cada elemento i de V , su distancia a a , también llamada *potencial*, se denota por

$$c^*(i) = c^*(a, i).$$

Si $(i, j) \in A$ entonces

$$c^*(i) + c(i, j) \geq c^*(j).$$

Sea G' el grafo parcial obtenido al considerar los arcos (i, j) tales que $c^*(i) + c(i, j) = c^*(j)$ y R' la red correspondiente. Entonces a es raíz de G' .

En general, la raíz de un grafo no es siempre raíz de todos sus subgrafos.

3.2.2. Algoritmo de Dijkstra

Este algoritmo [Dij59] es muy sencillo, de él se han derivado modificaciones más eficientes y generales. Para mayor sencillez supongamos que $c_{ij} \geq 0$ para todos los arcos. Esto garantiza que la red no tiene circuitos absorbentes.

En este algoritmo se usa el simbolismo gráfico de rótulos. A los nodos, a los que se ha calculado el valor c^* , se les coloca una “*marca*” y se dice que están marcados.

Inicialmente se marca el nodo a y $c^*(a) = 0$. A los demás nodos se les da un valor provisional $c'(i) = \infty$. A los sucesores del último nodo marcado i , se les recalcula el valor provisional c' de la siguiente manera:

$$c'(j) \leftarrow \min_{i \in \Gamma_j^-} \{ c'(j), c^*(i) + c_{ij} \}.$$

De los nodos no marcados, se escoge el de menor $c'(k)$, se asigna este valor como su potencial, y se marca el nodo escogido. Ahora se repite el proceso hasta marcar el nodo z .

Para poder reconstruir el camino se requiere saber desde qué nodo se marcó un nodo, luego es necesario saber desde qué nodo se calculó el valor c' .

Como los rótulos tienen un significado visual, para mayor sencillez del esquema del algoritmo, convengamos que un nodo j está marcado si $c^*(j) < \infty$. Convengamos también que $p(j)$ indica de donde “proviene” j , o sea, el nodo desde donde se llega a j por el mejor camino (o uno de los mejores) obtenido hasta ese momento.

ALGORITMO DE DIJKSTRA

```

datos: :  $V$ ,  $A$ ,  $a$ ,  $z$ , MAXIT
para  $j = 1, \dots, n$ 
     $c^*(j) \leftarrow \infty$ ,  $c'(j) \leftarrow \infty$ ,  $p(j) \leftarrow 0$ 
fin-para
     $c^*(a) \leftarrow 0$ ,  $c'(a) \leftarrow 0$ 
     $i \leftarrow a$ ,  $k \leftarrow 1$ 
mientras  $c^*(z) = \infty$  y  $k < \text{MAXIT}$ 
    para  $j \in \Gamma^+(i)$ 
         $t \leftarrow c^*(i) + c_{ij}$ 
        si  $t < c'(j)$ 
             $c'(j) \leftarrow t$ ,  $p(j) \leftarrow i$ 
        fin-si
    fin-para
     $i \leftarrow \operatorname{argmin}_j \{c'(j) : c^*(j) = \infty\}$ 
     $c^*(i) = c'(i)$ 
     $k \leftarrow k + 1$ 
fin-mientras

```

El algoritmo se acaba de dos maneras:

- $c^*(z) < \infty$, es decir, se encontró la distancia de a a z .
- $k \geq \text{MAXIT}$, es decir, hubo demasiadas iteraciones y posiblemente no haya convergencia, o sea, posiblemente hay circuitos absorbentes o posiblemente z no es descendiente de a .

Una de las rutas óptimas se encuentra “al revés”, $z, p(z), p(p(z)), p(p(p(z))), \dots, a$.

Ejemplo 3.5. Hallar un camino más corto en la red de la figura 3.10, entre $a = 1$ y $z = 7$.

Esta información gráfica se puede representar por medio de la siguiente lista de arcos y costos.

■

Figura 3.10.

i	j	c_{ij}
1	2	3
1	3	6
2	3	2
2	4	1
2	5	2
3	5	1
4	5	2
4	6	4
5	7	2
7	6	4

Inicialmente se marca el nodo a :

j	$c^*(j)$	$c'(j)$	$p(j)$
1	0	0	0
2	∞	∞	0
3	∞	∞	0
4	∞	∞	0
5	∞	∞	0
6	∞	∞	0
7	∞	∞	0

Para los sucesores de 1, es decir, para los nodos 2 y 3, se recalcula $c'(j)$, por ejemplo,

$$c'(2) \leftarrow \min\{c'(2), c^*(1) + c_{12}\}$$

$$c'(2) \leftarrow \min\{\infty, 0 + 3\} = 3 .$$

j	$c^*(j)$	$c'(j)$	$p(j)$
1	0	0	0
2	∞	3	1
3	∞	6	1
4	∞	∞	0
5	∞	∞	0
6	∞	∞	0
7	∞	∞	0

El nodo no marcado de menor $c'(j)$ es el nodo 2, entonces se marca:

j	$c^*(j)$	$c'(j)$	$p(j)$
1	0	0	0
2	3	3	1
3	∞	6	1
4	∞	∞	0
5	∞	∞	0
6	∞	∞	0
7	∞	∞	0

Para los sucesores de 2, es decir, para los nodos 3, 4 y 5, se recalcula $c'(j)$, por ejemplo,

$$c'(3) \leftarrow \min\{c'(3), c^*(2) + c_{23}\}$$

$$c'(3) \leftarrow \min\{6, 3 + 2\} = 5 .$$

j	$c^*(j)$	$c'(j)$	$p(j)$
1	0	0	0
2	3	3	1
3	∞	5	2
4	∞	4	2
5	∞	5	2
6	∞	∞	0
7	∞	∞	0

El nodo no marcado de menor $c'(j)$ es el nodo 4, entonces se marca:

j	$c^*(j)$	$c'(j)$	$p(j)$
1	0	0	0
2	3	3	1
3	∞	5	2
4	4	4	2
5	∞	5	2
6	∞	∞	0
7	∞	∞	0

Para los sucesores de 4, es decir, para los nodos 6 y 5, se recalcula $c'(j)$:

j	$c^*(j)$	$c'(j)$	$p(j)$
1	0	0	0
2	3	3	1
3	∞	5	2
4	4	4	2
5	∞	5	2
6	∞	8	4
7	∞	∞	0

El nodo no marcado de menor $c'(j)$ es el nodo 3, entonces se marca:

j	$c^*(j)$	$c'(j)$	$p(j)$
1	0	0	0
2	3	3	1
3	5	5	2
4	4	4	2
5	∞	5	2
6	∞	8	4
7	∞	∞	0

Para los sucesores de 3, es decir, para el nodo 5, se recalcula $c'(j)$:

j	$c^*(j)$	$c'(j)$	$p(j)$
1	0	0	0
2	3	3	1
3	5	5	2
4	4	4	2
5	∞	5	2
6	∞	8	4
7	∞	∞	0

El nodo no marcado de menor $c'(j)$ es el nodo 5, entonces se marca:

j	$c^*(j)$	$c'(j)$	$p(j)$
1	0	0	0
2	3	3	1
3	5	5	2
4	4	4	2
5	5	5	2
6	∞	8	4
7	∞	∞	0

Para los sucesores de 5, es decir, para el nodo 7, se recalcula $c'(j)$:

j	$c^*(j)$	$c'(j)$	$p(j)$
1	0	0	0
2	3	3	1
3	5	5	2
4	4	4	2
5	5	5	2
6	∞	8	4
7	∞	7	5

El nodo no marcado de menor $c'(j)$ es el nodo 7, entonces se marca:

j	$c^*(j)$	$c'(j)$	$p(j)$
1	0	0	0
2	3	3	1
3	5	5	2
4	4	4	2
5	5	5	2
6	∞	8	4
7	7	7	5

Como ya se marcó el nodo $z = 7$, se detiene el proceso. El CMC tiene longitud 7. Para reconstruir la ruta, se empieza en $z = 7$ que proviene de 5, que a su vez viene de 2, que viene de 1. Luego uno de los caminos más cortos es $(1, 2, 5, 7)$.

Obsérvese que el problema acabó porque se marcó $z = 7$, pero, por ejemplo, 6 no está marcado.



Figura 3.11.

3.2.3. Algoritmo de Floyd-Warshall

Este algoritmo [Flo62] es más general que el de Dijkstra. Puede ser usado en una red con costos negativos. Además permite detectar circuitos de costo negativo. Requiere más espacio para guardar la información necesaria, ya que utiliza dos matrices $n \times n$, pero da más información, puesto que cuando no hay circuitos de costo negativo, proporciona la distancia más corta entre todas las parejas de nodos.

Este algoritmo empieza con dos matrices cuadradas de orden n : D^0 y T^0 . A partir de ellas se calculan D^1 , T^1 , luego D^2 , T^2 , ..., hasta llegar a $D = D^n$, $T = T^n$. Aquí los superíndices indican iteración y no potencia (multiplicación) de matrices.

Si no hay circuitos absorbentes, el elemento d_{ij} de la matriz final D indica la distancia (distancia más corta) entre el nodo i y el nodo j . En particular, si $d_{ij} = \infty$, no hay un camino que va de i a j . La matriz final T sirve para reconstruir el camino o trayecto de un nodo i a un nodo j .

Las matrices iniciales D^0 y T^0 se construyen así:

$$d_{ij}^0 = \begin{cases} 0 & \text{si } i = j; \\ \infty & \text{si } i \neq j, (i, j) \notin A; \\ c_{ij} & \text{si } i \neq j, (i, j) \in A. \end{cases}$$

$$t_{ij}^0 = j \quad \forall i.$$

La matrices de las iteraciones se calculan mediante las siguientes reglas:

```

si  $d_{ij}^{k-1} \leq d_{ik}^{k-1} + d_{kj}^{k-1}$ 
     $d_{ij}^k = d_{ij}^{k-1}$ 
     $t_{ij}^k = t_{ij}^{k-1}$ 
sino
     $d_{ij}^k = d_{ik}^{k-1} + d_{kj}^{k-1}$ 
     $t_{ij}^k = t_{ik}^{k-1}$ 
fin-si

```

Para reconstruir un CMC de i a j se procede de la siguiente manera. Sea $q = t_{ij}$. Si $t_{ij} = j$ entonces el CMC de i hasta j es simplemente el arco (i, j) . Si $q \neq j$ entonces el CMC de i hasta j , empieza en i , enseguida pasa por q y después se averigua por el CMC entre q y j .

En lo que sigue se usará parcialmente una notación semejante de Matlab y Scilab. Si se tiene un vector fila x de p elementos, entonces

$$(x, t)$$

es un vector fila en el que t es un elemento adicional en la posición $p + 1$.

Si j es descendiente de i , el siguiente esquema algorítmico permite obtener un camino de costo mínimo desde i hasta j , usando las matrices D y T .

```

 $q \leftarrow t_{ij}$ 
 $\alpha \leftarrow (i, q)$ 
 $k \leftarrow 1$ 
mientras  $q \neq j$  y  $k \leq n$ 
     $q \leftarrow t_{qj}$ 
     $\lambda \leftarrow (\alpha, q)$ 
     $k \leftarrow k + 1$ 
fin-mientras

```

Si en una de las matrices D^k aparece un elemento diagonal negativo, por ejemplo, $d_{ii}^k < 0$, entonces existe un circuito de costo negativo que empieza en i y acaba en i . Utilizando T^k se construye uno de estos circuitos. Se aplica el mismo esquema anterior con $T = T^k$ para obtener un camino entre i e i .

Ejemplo 3.6. Hallar, en la red de la figura 3.12, las distancias más cortas entre los nodos o encontrar un circuito de costo negativo.

8

Figura 3.12.

$$D^0 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & \infty & \infty & \infty & 7 \\ \infty & 0 & 3 & \infty & 5 & 1 \\ \infty & \infty & 0 & 4 & \infty & \infty \\ \infty & -8 & \infty & 0 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{bmatrix}, \quad T^0 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

En esta iteración siempre $d_{ij}^0 \leq d_{i1}^0 + d_{1j}^0$, entonces $D^1 = D^0$ y $T^1 = T^0$. Por ejemplo, $d_{25}^0 = 5 \leq d_{21}^0 + d_{15}^0 = \infty + \infty$.

$$D^1 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & \infty & \infty & \infty & 7 \\ \infty & 0 & 3 & \infty & 5 & 1 \\ \infty & \infty & 0 & 4 & \infty & \infty \\ \infty & -8 & \infty & 0 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{bmatrix}, \quad T^1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

En esta iteración sí hay cambios. Por ejemplo, $d_{43}^1 = \infty \not\leq d_{42}^1 + d_{23}^1 = -8 + 3 = -5$, entonces $d_{43}^2 = -5$ y $t_{43}^2 = t_{42}^1 = 2$.

$$D^2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 5 & \infty & 7 & 3 \\ \infty & 0 & 3 & \infty & 5 & 1 \\ \infty & \infty & 0 & 4 & \infty & \infty \\ \infty & -8 & -5 & 0 & -3 & -7 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{bmatrix}, \quad T^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 2 & 4 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$D^3 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 5 & 9 & 7 & 3 \\ \infty & 0 & 3 & 7 & 5 & 1 \\ \infty & \infty & 0 & 4 & \infty & \infty \\ \infty & -8 & -5 & -1 & -3 & -7 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{bmatrix}, \quad T^3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

El elemento diagonal $d_{44} = -1$, luego hay un circuito, que empieza en 4 y acaba en 4, de costo negativo. Para obtener uno de estos circuitos se realizan los siguientes pasos: $t_{44} = 2$, luego el circuito empieza en 4 y sigue después a 2; $t_{24} = 3$, luego el circuito continúa por 3; $t_{34} = 4$, luego el circuito acaba en 4. En resumen, el circuito $(4, 2, 3, 4)$ tiene costo -1 . \diamond

Ejemplo 3.7. Hallar las distancias más cortas entre los nodos de la red de la figura 3.10 (ejemplo 3.5), o encontrar un circuito de costo negativo.

$$D^0 = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 6 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 0 & 2 & 1 & 2 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 0 & \infty & 1 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 0 & 2 & 4 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & \infty & 2 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 4 & 0 \end{bmatrix}, \quad T^0 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

$$D^7 = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 & 4 & 5 & 8 & 7 \\ \infty & 0 & 2 & 1 & 2 & 5 & 4 \\ \infty & \infty & 0 & \infty & 1 & 7 & 3 \\ \infty & \infty & \infty & 0 & 2 & 4 & 4 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & 6 & 2 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 4 & 0 \end{bmatrix}, \quad T^7 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 7 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

El costo del CMC entre 1 y 6 es 8. Reconstrucción de un camino: $t_{16} = 2$, $t_{26} = 4$, $t_{46} = 6$. Luego un CMC es $(1, 2, 4, 6)$. \diamond

3.3. Flujo máximo

3.3.1. Introducción

Sea una red $R = (V, A, u)$ con una única fuente a y un único sumidero z . Supongamos ahora que la función $u : A \rightarrow \mathbb{R}_+$ indica la capacidad que tiene cada arco. En estas notas $\mathbb{R}_+ = [0, \infty[$. Suponemos además que los valores de u son enteros, es decir, $u : A \rightarrow \mathbb{Z}_+$.

Se desea llevar el mayor número de unidades de un mismo producto desde el nodo a hasta z , respetando las capacidades de los arcos. En cada vértice, diferente de a y z , se debe cumplir la ley de conservación, “lo que entra es igual a lo que sale”. O de otra forma, “lo que entra menos lo que sale es igual a cero”.

Sea x_{ij} el número de unidades que van del vértice i al vértice j . El problema se puede plantear así:

$$\begin{aligned} & \max \sum_{j \in \Gamma^+(a)} x_{aj} \\ & \sum_{i \in \Gamma^-(j)} x_{ij} - \sum_{k \in \Gamma^+(j)} x_{jk} = 0 \quad \forall j \neq a, z \\ & x_{ij} \leq u_{ij} \quad \forall (i, j) \in A \\ & x_{ij} \geq 0 \quad \forall (i, j) \in A. \end{aligned}$$

También se puede plantear así:

$$\begin{aligned} & \max v \\ & \sum_{i \in \Gamma^-(j)} x_{ij} - \sum_{k \in \Gamma^+(j)} x_{jk} = \begin{cases} -v & \text{si } j = a \\ 0 & \text{si } j \neq a, z \\ v & \text{si } j = z \end{cases} \\ & x_{ij} \leq u_{ij} \quad \forall (i, j) \in A \\ & x_{ij} \geq 0 \quad \forall (i, j) \in A. \end{aligned}$$

Fijemos un orden para enumerar los m arcos. Un *flujo admisible* es un vector $x = (\dots, x_{ij}, \dots) \in \mathbb{R}^m$ que cumple las restricciones. Para este problema siempre existe por lo menos uno: $x = 0$, es decir, $x_{ij} = 0$ para todo arco (i, j) . Para un flujo admisible, la cantidad

$$v = v(x) = \sum_{j \in \Gamma^+(a)} x_{aj}$$

se llama el valor del flujo.

Se dice que una pareja de conjuntos (X, Y) es un *corte* que separa a de z o, simplemente, un corte, si:

- $X \subseteq V$
- $Y \subseteq V$
- $a \in X$
- $z \in Y$
- $X \cap Y = \emptyset$
- $X \cup Y = V$.

Por la definición se ve que Y debe ser el complemento de X con respecto a V . En estas notas, siempre que no se diga lo contrario, y mientras no sea ambiguo, dado X un subconjunto de V , se denotará el complemento de X con respecto a V por medio de \bar{X} . Entonces, un *corte* es una pareja (X, \bar{X}) tal que:

- $X \subseteq V$
- $a \in X$
- $z \notin X$.

Dado un flujo admisible x y, X y Y dos subconjuntos de V , no necesariamente disyuntos, se define el conjunto de arcos que van de X a Y , el flujo y la capacidad:

$$\begin{aligned} A(X, Y) &= \{(i, j) \in A : i \in X, j \in Y\} \\ v(X, Y) &= v(x, X, Y) = \sum_{(i, j) \in A(X, Y)} x_{ij} \\ u(X, Y) &= \sum_{(i, j) \in A(X, Y)} u_{ij}. \end{aligned}$$

Si se tiene un corte (X, \bar{X}) , $A(X, \bar{X})$ indica el conjunto de arcos que

empiezan en un nodo de X y acaban en un nodo fuera de X , $u(X, \bar{X})$ indica la capacidad del corte y $v(X, \bar{X})$ indica el valor del flujo del corte.

Se puede demostrar rigurosamente y también se puede intuir que si x es un flujo admisible y (X, \bar{X}) es un corte, entonces

$$v = v(x) \leq u(X, \bar{X}).$$

Sea v^* el máximo valor de los flujos. Como los valores de las capacidades son enteros, y

$$v \leq \sum_{j \in \Gamma^+(a)} u(a, j),$$

entonces existe el valor v^* . Un flujo x tal que $v(x) = v^*$ se llama un flujo óptimo.

Se deduce entonces que si x es un flujo admisible y existe un corte (X, \bar{X}) tal que

$$v(x) = u(X, \bar{X}),$$

entonces $v(x) = v^*$, es decir, x es óptimo.

Como V es finito, entonces el número de cortes (que separan a de z) es finito, luego existe el valor

$$u^* = \min\{u(X, \bar{X}) : (X, \bar{X}) \text{ es un corte}\}.$$

Un corte (X, \bar{X}) tal que $u(X, \bar{X}) = u^*$ se llama un corte minimal.

También se puede demostrar que si se tiene x un flujo óptimo entonces $v(x) = v^* = u^*$. En resumen, el teorema de Ford-Fulkerson dice que *un flujo admisible x es óptimo si y sólo si existe un corte (X, \bar{X}) tal que*

$$v(x) = u(X, \bar{X}).$$

La demostración del teorema y el algoritmo se basan en las siguientes ideas. Si se tiene un flujo admisible se construye un corte (X, \bar{X}) de la siguiente manera:

- i) $a \in X$;
- ii) si $i \in X$, $j \in \Gamma^+(i)$ y $x_{ij} < u_{ij}$, entonces $j \in X$;
- iii) si $i \in X$, $j \in \Gamma^-(i)$ y $x_{ji} > 0$, entonces $j \in X$.

Se demuestra que si el flujo es óptimo, entonces $z \notin X$, es decir, (X, \bar{X}) es un corte y que

$$v(x) = u(X, \bar{X}).$$

3.3.2. Algoritmo de Ford-Fulkerson

En este algoritmo, dado un flujo admissible x , se construye X según los criterios i), ii) y iii). Si se logra obtener un corte, es decir, si $z \notin X$, entonces el flujo es óptimo. Si $z \in X$, entonces el flujo se puede mejorar, es decir, su valor se puede aumentar.

Para facilitar la construcción de X se coloca a cada nodo, paso a paso, un *rótulo* (etiqueta o marca). Este rótulo es sencillamente una pareja (π_i, δ_i) . Los nodos que están en X son precisamente los que tienen rótulo. La construcción de X es entonces gradual, **durante el algoritmo, X indica los nodos que hasta ese momento han sido rotulados**. Sólo al final de un proceso de rotulación, X representa su verdadero significado.

El valor π_i sirve para indicar el nodo que se utilizó para rotular el nodo i . Además π_i tiene un signo. Si $\pi_i > 0$, entonces se utilizó el nodo π_i e $i \in \Gamma^+(\pi_i)$. Si $\pi_i < 0$, entonces se utilizó el nodo $-\pi_i$ e $i \in \Gamma^-(\pi_i)$.

El valor δ_i indica el valor en que se podría modificar el flujo en un camino para mejorar el valor del flujo. Más adelante está la definición precisa de δ_i .

Durante el proceso de rotulación se utiliza un conjunto o lista L , que contiene todos **los nodos que están rotulados y que no han sido examinados**. Examinar un nodo rotulado quiere decir estudiar sus vecinos (sucesores o predecesores) no rotulados. Para que un nodo sea examinado se requiere que ya esté rotulado.

Si $i \in L$, **examinar** i significa lo siguiente:

```

para  $j \in \Gamma^+(i)$ 
  si  $j \notin X$  y  $x_{ij} < u_{ij}$ 
     $\pi_j \leftarrow i$ 
     $\delta_j \leftarrow \min\{\delta_i, u_{ij} - x_{ij}\}$ 
     $j$  entra a  $X$  y a  $L$ 
  fin-si
fin-para
para  $j \in \Gamma^-(i)$ 
  si  $j \notin X$  y  $x_{ji} > 0$ 
     $\pi_j \leftarrow -i$ 
     $\delta_j \leftarrow \min\{\delta_i, x_{ji}\}$ 
     $j$  entra a  $X$  y a  $L$ 
  fin-si
fin-para

```

Para empezar el algoritmo $X \leftarrow \emptyset$. En seguida se rotula la fuente con $\pi_a \leftarrow 0$, $\delta_a \leftarrow \infty$, $X \leftarrow \{a\}$ y $L \leftarrow \{a\}$. Mientras haya nodos en L se examinan. Cuando no haya más nodos en L , hay dos posibilidades.

- Si $z \notin X$, entonces x es óptimo.
- Si $z \in X$, entonces se puede mejorar el flujo.

Más adelante se verá cómo mejorar el flujo. Despues de mejorar el flujo se vuelve a empezar. El esquema del algoritmo es el siguiente:

```

 $x_{ij} \leftarrow 0$  para todo arco  $(i, j)$ 
hacer
   $(\pi_a, \delta_a) \leftarrow (0, \infty)$ 
   $X \leftarrow \{a\}$ ,  $L \leftarrow \{a\}$ 
  mientras  $L \neq \emptyset$  y  $z \notin X$ 
    escoger  $i$  en  $L$ 
    examinar  $i$ 
    sacar  $i$  de  $L$ 
  fin-mientras
  si  $z \in X$  ent mejorar el flujo
  sino  $x$  es óptimo
  mientras  $x$  no es óptimo

```

Cuando $z \in X$, el flujo se puede mejorar modificando, en algunos arcos del grafo, el valor x_{ij} en una cantidad $\varepsilon = \delta_z$. Se empieza en el nodo z y se

hace un regreso mediante los valores π_i o $-\pi_i$ hasta llegar a a . De manera más precisa, este es el esquema del procedimiento:

```

 $i \leftarrow z$ 
mientras  $i \neq a$ 
  si  $\pi_i > 0$ 
     $j \leftarrow \pi_i$ 
     $x_{ji} \leftarrow x_{ji} + \varepsilon$ 
  sino
     $j \leftarrow -\pi_i$ 
     $x_{ij} \leftarrow x_{ij} - \varepsilon$ 
  fin-si
   $i \leftarrow j$ 
fin-mientras

```

Con este procedimiento se construye, desde el final hacia el comienzo, una *cadena aumentante o mejorable* y al mismo tiempo se mejora el flujo,

Ejemplo 3.8. Hallar, en la red de la figura 3.13, el máximo flujo entre 1 y 6.

Cuando un nodo tenga rótulo, éste será la pareja (π_i, δ_i) . Esta pareja aparece en el dibujo al lado del nodo. Junto a cada arco habrá dos valores. El primero indicará x_{ij} , el segundo u_{ij} .

Se empieza con un flujo factible: $x_{ij} \leftarrow 0$ para todos los arcos. Se le coloca rótulo a la fuente. Ver figura 3.14.

$X = \{1\}$, $L = \{1\}$. Se examina 1, se rotulan 2 y 3. Ver figura 3.15.

$X = \{1, 2, 3\}$, $L = \{2, 3\}$. Se examina 2, se rotulan 4 y 5. Ver figura 3.16.

$X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $L = \{3, 4, 5\}$. Se examina 3, no se rotula nada.

$X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $L = \{4, 5\}$. Se examina 4, se rotula 6. Ver figura 3.17.

$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $L = \{5, 6\}$. Como $z = 6$ está en X , entonces el flujo no es óptimo. Se modifica el flujo en la cantidad $\varepsilon = \delta_6 = 3$, en los arcos determinados por los nodos 6, 4, 2, 1. Ver figura 3.18. La cadena $(1, 2, 4, 6)$ era una cadena aumentante.

Se borran todos los rótulos. Se rotula 1. Se examina 1, se rotula 3. Se examina 3, se rotula 4. Se examina 4, se rotulan 6 y 2 ($\pi_2 = -4$). Ver figura 3.19.

Como $z \in X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, entonces el flujo no es óptimo. Se modifica

el flujo en $\varepsilon = \delta_6 = 1$, en los arcos determinados por los nodos 6, 4, 3, 1. Ver figura 3.20.

Se borran todos los rótulos. Se rotula 1. Se examina 1, se rotula 3. Se examina 3, se rotula 4. Se examina 4, se rotula 2 ($\pi_2 = -4$). Se examina 2, se rotula 5. Se examina 5, se rotula 7. Se examina 7, se rotula 6. Ver figura 3.21.

$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, luego el flujo no es óptimo. Se modifica el flujo en $\varepsilon = \delta_6 = 1$, en los arcos determinados por los nodos 6, 7, 5, 2, 4, 3, 1. Obsérvese que en el arco (2, 4) se hace al revés, es decir, se disminuye el valor de x_{24} . Ver figura 3.22.

Se borran todos los rótulos. Se rotula 1, $X = \{1\}$, $L = \{1\}$. Se examina 1, se rotula 3, $X = \{1, 3\}$, $L = \{3\}$. Se examina 3, no se rotula nada, $X = \{1, 3\}$, $L = \emptyset$. Ver figura 3.23.

Como $L = \emptyset$ y z no está en $X = \{1, 3\}$, entonces el flujo es óptimo. Luego el corte ($\{1, 3\}$, $\{2, 4, 5, 6, 7\}$) es un corte minimal. Su capacidad debe ser igual al valor del flujo, es decir, 5. Ver figura 3.24.



Figura 3.13.

(0,16)3

Figura 3.14.

(0,16)3

Figura 3.15.

(0,15)3

Figura 3.16.

(0,15)3

Figura 3.17.

013 3

Figura 3.18.

((013))3

Figura 3.19.

016 3

Figura 3.20.

((016))3

Figura 3.21.

3.22 3

Figura 3.22.

((3.22)2

Figura 3.23.



Figura 3.24.

Ejemplo 3.9. El acueducto de un municipio tiene tres depósitos de agua: A, B y C. Debe llevar agua a cuatro corregimientos: D, E, F y G. En la siguiente tabla están las capacidades (en litros/segundo) de cada uno de los depósitos, las necesidades (l/s) de cada corregimiento y las capacidades de conducción (l/s) entre cada depósito y cada municipio. Entre algunos depósitos y algunos corregimientos no hay posibilidad de enviar agua.

		D	E	F	G
		15	5	10	15
A	22	5	7		10
B	12	10	2	7	
C	10			5	5

Se desea conocer la distribución de agua que, respetando las capacidades de los tanques y de la tubería existente, satisfaga de la mejor manera posible las necesidades de los cuatro corregimientos.

Este problema se puede plantear como un problema de flujo máximo, introduciendo dos nodos ficticios: una fuente denominada 1 y un sumidero denominado 9. Los tanques serán los nodos 2, 3 y 4. Los corregimientos serán 5, 6, 7 y 8. Ver figura 3.25.

10 10 73 20

Figura 3.25.

En la octava iteración se obtiene un corte minimal

$$X = \{1, 2, 6\},$$

$$\begin{aligned}
\bar{X} &= \{3, 4, 5, 7, 8, 9\}, \\
u(1, 3) &= 12, \\
u(1, 4) &= 10, \\
u(2, 5) &= 5, \\
u(2, 8) &= 10, \\
u(6, 9) &= 5, \\
u(X, \bar{X}) &= 42.
\end{aligned}$$

La solución está en la figura 3.26. En cada arco está el valor del flujo x_{ij} y la capacidad $u(i, j)$.

$$10 \leq \text{50001312} \leq 10$$

Figura 3.26.

3.4. Flujo de costo mínimo

Consideremos ahora una red $R = (V, A, u, c)$, donde V es el conjunto de nodos o vértices, A es el conjunto de arcos o flechas, u es la función de capacidad de los arcos y c es la función de costo unitario de los arcos. Si (i, j) es un arco, $c_{ij} = c(i, j)$ indica el costo de llevar una unidad del producto entre el nodo i y el nodo j .

Suponemos, por facilidad, que el grafo (A, V) es antisimétrico. Si no es así, cuando hay dos arcos (i, j) y (j, i) , uno de los dos se puede cambiar por dos arcos mediante un nodo ficticio.

Si se tiene un flujo x , éste tiene un costo

$$\sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij}.$$

Dado un flujo admisible x con valor de flujo v , se desea obtener un flujo también admisible y con el mismo valor v , pero que sea de costo mínimo. En particular, si el flujo admisible considerado es un flujo máximo (de valor máximo), entonces se tiene un problema de flujo máximo a costo mínimo.

A un flujo admisible x se le asocia una red $\tilde{R}(x) = \tilde{R} = (V, \tilde{A}, \tilde{c})$ definida por:

$$\begin{aligned} \text{si } (i, j) \in A \text{ y } x_{ij} < u_{ij}, \text{ entonces } (i, j) \in \tilde{A}, \tilde{c}_{ij} = c_{ij}, \\ \text{si } (i, j) \in A, \text{ y } x_{ij} > 0, \text{ entonces } (j, i) \in \tilde{A}, \tilde{c}_{ji} = -c_{ij}. \end{aligned}$$

Los primeros arcos se llaman *arcos normales*, los segundos se llaman *arcos inversos*.

El esquema del algoritmo para encontrar un flujo de valor v y costo mínimo es bastante sencillo. Dado x admisible de valor v , se construye $\tilde{R}(x)$. Si $\tilde{R}(x)$ tiene un circuito α de costo negativo, entonces se modifica el flujo para obtener uno del mismo valor pero de menor costo. El proceso se repite hasta que $\tilde{R}(x)$ no tenga circuitos de costo negativo.

Para encontrar un circuito α de costo negativo en $\tilde{R}(x)$, se puede usar el algoritmo de Floyd-Warshall visto en el capítulo 4.

Cuando se encuentra un circuito α , de costo negativo, en \tilde{R} , el flujo x se modifica de la siguiente manera. Supongamos que por este circuito de \tilde{R} se hace circular un flujo ε . Este flujo debe ser “superpuesto” al flujo x de R teniendo en cuenta los arcos normales (también están en A) y los arcos inversos (no están en A).

Sea (i, j) un arco de α . Aunque α no es un conjunto, diremos, abusando del lenguaje, que $(i, j) \in \alpha$. Sea x' el flujo modificado de R .

$$\begin{aligned} \text{si } (i, j) \in A, \text{ entonces } x'_{ij} = x_{ij} + \varepsilon; \\ \text{si } (i, j) \notin A, \text{ entonces } x'_{ji} = x_{ji} - \varepsilon; \end{aligned}$$

Es claro que a mayor valor de ε , mayor disminución en el costo. Pero si ε es demasiado grande puede alterar la factibilidad del flujo en R . Entonces ε debe tomar el mayor valor que no altere la factibilidad:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \min\{u_{ij} - x_{ij} : (i, j) \in \alpha, (i, j) \in A\}, \\ \varepsilon_2 &= \min\{x_{ji} : (i, j) \in \alpha, (i, j) \notin A\}, \\ \varepsilon &= \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}.\end{aligned}$$

Ejemplo 3.10. Consideremos la red del ejemplo 3.8 con su flujo máximo y, adicionalmente, una función de costo. Utilicemos la misma convención gráfica del ejemplo 3.8, es decir, al lado de cada arco hay dos valores, el primero es el valor x_{ij} , el segundo es u_{ij} . Encima de ellos estará el costo c_{ij} .

3.10.3

Figura 3.27.

El valor de este flujo es 5 y su costo es 52. ¿Es este costo mínimo? Para saberlo es necesario construir \tilde{R} .

Como $x_{12} = 3 < u_{12} = 3$, entonces $(1, 2) \notin \tilde{A}$.

Como $x_{12} = 3 > 0$, entonces $(2, 1) \in \tilde{A}$, $\tilde{c}_{21} = -4$.

Como $x_{13} = 2 < u_{13} = 6$, entonces $(1, 3) \in \tilde{A}$, $\tilde{c}_{13} = 2$.

Como $x_{13} = 2 > 0$, entonces $(3, 1) \in \tilde{A}$, $\tilde{c}_{31} = -2$.

⋮

Entonces se obtiene la red definida por la siguiente lista de arcos y costos:

i	j	\tilde{c}_{ij}
2	1	-4
1	3	2
3	1	-2
2	4	3
4	2	-3
2	5	1
5	2	-1
4	3	-2
6	4	-5
5	7	3
7	5	-3
7	6	2
6	7	-2

-43

Figura 3.28.

A esta red se aplica el método de Floyd-Warshall y se obtiene un circuito absorbente:

$$\alpha = (7, 6, 4, 2, 5, 7), \quad \tilde{c}(\alpha) = -2.$$

El cálculo de la máxima modificación da:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \min\{4, 2, 3\}, & \varepsilon_2 &= \min\{4, 2\}, \\ \varepsilon_1 &= 2, & \varepsilon_2 &= \infty, \\ \varepsilon &= 2. \end{aligned}$$

Al superponer este flujo del circuito sobre el flujo x , se obtiene un flujo del mismo valor, pero con costo $= 52 + (-2)(2) = 48$. Por ejemplo:

$$(7, 6) \in A \Rightarrow x'_{76} = x_{76} + \varepsilon = 1 + 2 = 3, \\ (6, 4) \notin A \Rightarrow x'_{46} = x_{46} - \varepsilon = 4 - 2 = 2.$$

033 3

Figura 3.29.

De nuevo se construye otra red \tilde{R} . La lista de arcos y costos es:

i	j	\tilde{c}_{ij}
2	1	-4
1	3	2
3	1	-2
2	4	3
5	2	-1
4	3	-2
4	6	5
6	4	-5
5	7	3
7	5	-3
7	6	2
6	7	-2

A esta red se aplica el algoritmo de Floyd-Warshall y no se obtiene



Figura 3.30.

ningún circuito de costo negativo, entonces el flujo actual tiene costo mínimo.

◇

3.5. Ruta crítica

Este método, conocido como CPM (Critical Path Method), fue desarrollado por la compañía Du Pont de Nemours y extendido por la compañía Mauchly Associates. Junto con el método PERT (Project Evaluation and Review Technique) desarrollado por la Marina de E.E.U.U., se utilizan para la planeación y control de proyectos.

La diferencia principal consiste en que para CPM los tiempos de las actividades se suponen conocidos de manera determinista; en PERT los tiempos tienen consideraciones probabilistas.

Para un proyecto dado se tiene la lista de actividades y el tiempo de duración de cada actividad. Además se conocen las actividades que deben ser realizadas antes de cada actividad. Es importante conocer las actividades que al tener algún retraso producen también un retraso en la terminación de todo el proyecto. Otras actividades pueden tener pequeños retrasos sin afectar la terminación de todo el proyecto.

Ejemplo 3.11. Construcción de una casa (tomado de Hillier y Lieberman). Inicialmente se hace una lista de las actividades necesarias para la realización del proyecto.

A_1	Excavación
A_2	Cimientos
A_3	Muros y cerchas
A_4	Techos
A_5	Instalación eléctrica
A_6	Plomería exterior
A_7	Plomería interior
A_8	Pañete interior
A_9	Colocación de pisos
A_{10}	Pintura interior
A_{11}	Acabados interiores
A_{12}	Pañete exterior
A_{13}	Pintura exterior
A_{14}	Acabados exteriores

Para cada actividad es necesario conocer el tiempo estimado y las actividades previas (deben haber terminado para poder empezar la actividad).

	Actividad	τ	Actividades previas
A_1	Excavación	2	
A_2	Cimientos	4	A_1
A_3	Muros y cerchas	10	A_2
A_4	Techos	6	A_3
A_5	Instalación eléctrica	7	A_3
A_6	Plomería exterior	4	A_3
A_7	Plomería interior	5	A_6
A_8	Pañete interior	8	A_5, A_7
A_9	Colocación de pisos	4	A_8
A_{10}	Pintura interior	5	A_8
A_{11}	Acabados interiores	6	A_9, A_{10}
A_{12}	Pañete exterior	7	A_4, A_6
A_{13}	Pintura exterior	9	A_{12}
A_{14}	Acabados exteriores	2	A_{13}

El proyecto se puede representar por medio de una red con las siguientes características:

- Cada actividad se representa por un arco.

- Cada actividad tiene un conjunto (puede ser vacío) de actividades previas, es decir, actividades que deben haber acabado antes de ella.
- Cada actividad A_k tiene asociado un tiempo estimado de duración τ_k . Si la actividad está representada por el arco (i, j) , entonces el tiempo estimado para la actividad se representa por τ_{ij} .
- Los nodos representan eventos en el tiempo, generalmente la terminación de una o varias actividades o el comienzo de otras.
- Si una actividad debe preceder a otra, entonces el evento final de la primera es el evento inicial de la segunda o el evento final de la primera es un ascendiente del evento inicial de la segunda.
- No puede haber dos actividades distintas que tengan el mismo evento inicial y el mismo evento final. Si es necesario, se crea un evento artificial y un arco artificial con tiempo de duración nulo.
- El grafo de la red tiene una fuente y raíz, el inicio del proyecto, y un sumidero, la terminación de todo el proyecto.

Para cada evento, es decir, cada nodo, se define el *tiempo más pronto*, denotado por t_i . Es el tiempo en el que ocurrirá el evento si las actividades que lo preceden acaban los más pronto posible. Para el nodo raíz, supongamos que es el nodo a , $t_a = 0$.

El proceso de cálculo de los t_i se hace hacia adelante. Inicialmente asignamos a todos los otros nodos $t_i = -1$. Un valor negativo indica que no se ha calculado el verdadero valor de t_i .

Mientras sea posible es necesario hacer lo siguiente:

$$\begin{aligned} &\text{buscar } j \text{ tal que} \\ &t_j < 0, \\ &t_i \geq 0 \text{ para todo } i \in \Gamma^-(j). \end{aligned}$$

A este nodo se le calcula el valor t_j :

$$t_j = \max\{t_i + \tau_{ij} : i \in \Gamma^-(j)\}.$$

Para cada evento, es decir, cada nodo, se define el *tiempo más tardío*, denotado por T_i . Es el último momento en que puede ocurrir el evento sin

retrasar la terminación del proyecto. Para el nodo sumidero, supongamos que es el nodo z , $T_z = t_z$.

El proceso de cálculo de los T_i se hace hacia atrás. Inicialmente asignamos a todos los otros nodos $T_i = \infty$. El valor infinito indica que no se ha calculado el verdadero valor de T_i .

Mientras sea posible es necesario hacer lo siguiente:

encontrar un nodo i tal que:

$$\begin{aligned} T_i &= \infty, \\ T_j &< \infty \text{ para todo } j \in \Gamma^+(i). \end{aligned}$$

A este nodo se le calcula el valor T_i :

$$T_i = \min\{T_j - \tau_{ij} : j \in \Gamma^+(i)\}.$$

La holgura para un evento i es la diferencia entre el tiempo más tardío y el tiempo más pronto:

$$h_i = T_i - t_i.$$

Indica cuánto retraso se puede tolerar para llegar a ese evento sin que se retrase el proyecto.

La holgura para una actividad (i, j) se obtiene al sustraer del tiempo más tardío del evento j , el tiempo más pronto del evento i y el tiempo estimado para la actividad (i, j) :

$$h_{ij} = T_j - t_i - \tau_{ij}.$$

Indica cuánto retraso se puede tolerar en la terminación de esa actividad sin que se retrase el proyecto.

Una *ruta crítica* es una ruta compuesta por actividades de holgura nula.

3.5.1. De la tabla de actividades a la red

A partir de la tabla de actividades es necesario construir la red asociada. Este proceso conlleva varias etapas y se puede realizar de varias formas. Unas más sencillas que pueden producir una red más grande, otras más sofisticadas que pueden producir una red más pequeña. A continuación una forma sencilla para construir la red.

- **Paso 1.** Colocar como nodo de inicio (o nodo raíz) el nodo 1.
- **Paso 2.** Para cada actividad A_k sin actividades anteriores:
 - **Paso 2a** Crear dos nodos nuevos, i y j , y asociar a A_k el arco (i, j) con duración $\tau_{ij} = \tau_k$.
 - **Paso 2b** Crear el arco ficticio $(1, i)$ con duración nula.
- **Paso 3.** Considerar cada actividad A_k sin arco asociado, tal que todas las actividades anteriores a ella tengan arco asociado.
 - **Paso 3a.** Crear dos nodos nuevos, i y j , y asociar a A_k el arco (i, j) con duración $\tau_{ij} = \tau_k$.
 - **Paso 3b.** Por cada actividad anterior a A_k , con arco (u, v) , se construye un arco ficticio (v, i) con duración $\tau_{vi} = 0$.

El paso 3 se repite mientras sea necesario.

- **Paso 4a.** Cuando el paso 3 se haya efectuado la veces necesarias, crear un nodo nuevo, z , que será el sumidero o evento final del proyecto.
- **Paso 4b** Para todos los nodos j sin sucesor (correspondientes a las actividades que no son actividades previas de otras actividades) crear un arco ficticio (j, z) con $\tau_{jz} = 0$

Ejemplo 3.12. Considere la siguiente lista de actividades:

	τ	Actividades anteriores
A_1	6	
A_2	9	
A_3	8	A_1, A_2
A_4	7	A_1, A_2
A_5	10	A_4
A_6	12	A_3, A_5
A_7	5	A_3, A_4

Paso 2.

A_1 : arco $(2, 3)$, $\tau_{23} = 6$; arco ficticio $(1, 2)$, $\tau_{12} = 0$.
 A_2 : arco $(4, 5)$, $\tau_{45} = 9$; arco ficticio $(1, 4)$, $\tau_{14} = 0$.

Paso 3.

A_3 : arco $(6, 7)$, $\tau_{67} = 8$; arco ficticio $(3, 6)$, $\tau_{36} = 0$, arco ficticio $(5, 6)$, $\tau_{56} = 0$.

A_4 : arco $(8, 9)$, $\tau_{89} = 7$; arco ficticio $(3, 8)$, $\tau_{38} = 0$, arco ficticio $(5, 8)$, $\tau_{58} = 0$.

A_5 : arco $(10, 11)$, $\tau_{10,11} = 10$; arco ficticio $(9, 10)$, $\tau_{9,10} = 0$.

A_6 : arco $(12, 13)$, $\tau_{12,13} = 12$; arco ficticio $(7, 12)$, $\tau_{7,12} = 0$, arco ficticio $(11, 12)$, $\tau_{11,12} = 0$.

A_7 : arco $(14, 15)$, $\tau_{14,15} = 5$; arco ficticio $(7, 14)$, $\tau_{7,14} = 0$, arco ficticio $(9, 14)$, $\tau_{9,14} = 0$.

Paso 4. $z = 16$; arcos ficticios $(13, 16)$, $(15, 16)$. Ver figura 3.31.

~~A41112~~

Figura 3.31.

Cálculo de los t_j : $t_1 = 0$; $t_2 = \max\{0 + 0\} = 0$; $t_3 = \max\{0 + 6\} = 6$; $t_4 = \max\{0 + 0\} = 0$; $t_5 = \max\{0 + 9\} = 9$; $t_6 = \max\{6 + 0, 9 + 0\} = 9$; \dots $t_{16} = \max\{38 + 0, 22 + 0\} = 38$.

Cálculo de los T_i : $T_{16} = 38$; $T_{15} = \min\{38 - 0\} = 38$; $T_{14} = \min\{38 - 5\} = 33$; $T_{13} = \min\{38 - 0\} = 38$; $T_{12} = \min\{38 - 12\} = 26$; $T_{11} = \min\{26 - 0\} = 26$; $T_{10} = \min\{26 - 10\} = 16$; $T_9 = \min\{16 - 0, 33 - 0\} = 16$; \dots $T_1 = \min\{3 - 0, 0 - 0\} = 0$.

i	t_i	T_i
1	0	0
2	0	3
3	6	9
4	0	0
5	9	9
6	9	18
7	17	26
8	9	9
9	16	16
10	16	16
11	26	26
12	26	26
13	38	38
14	17	33
15	22	38
16	38	38

Cálculo de las holguras de las actividades: $h(A_1) = h_{23} = T_3 - t_2 - \tau_{23} = 9 - 0 - 6 = 3$; $h(A_2) = h_{45} = T_5 - t_4 - \tau_{45} = 9 - 0 - 9 = 0$; ...

A_k	$h(A_k)$
A_1	3
A_2	0
A_3	9
A_4	0
A_5	0
A_6	0
A_7	16

Las actividades A_2 , A_4 , A_5 y A_6 son críticas. \diamond

3.5.2. Simplificación de una red

Una vez construida la red, es posible simplificarla, suprimiendo algunos arcos ficticios.

- Sea (u, i) un arco ficticio que precede al arco real (una actividad real) (i, j) . Si el nodo i no tiene otros predecesores diferentes de u y no tiene otros sucesores diferentes de j , entonces se puede suprimir el

arco ficticio (u, i) y el nodo i . En este caso el arco real (i, j) se cambia por (u, j) .

\mathcal{A}_k

- De manera análoga, sea (j, v) un arco ficticio precedido por el arco real (una actividad real) (i, j) . Si el nodo j no tiene otros predecesores diferentes de i y no tiene otros sucesores diferentes de v , entonces se puede suprimir el arco ficticio (j, v) y el nodo j . En este caso el arco real (i, j) se cambia por (i, v) .

\mathcal{A}_k

- Puede ser útil renombrar los nodos para eliminar los nodos aislados provenientes de las modificaciones anteriores.

Ejemplo 3.13. Simplificar la red del ejemplo anterior, calcular el tiempo más pronto, y el tiempo más tardío para cada nodo, y la holgura de cada actividad.

remplazar	por
$(1, 2)$ $(2, 3)$	$(1, 3)$
$(1, 4)$ $(4, 5)$	$(1, 5)$
$(9, 10)$ $(10, 11)$	$(9, 11)$
$(9, 11)$ $(11, 12)$	$(9, 12)$
$(12, 13)$ $(13, 16)$	$(12, 16)$
$(14, 15)$ $(15, 16)$	$(14, 16)$

La red después de las supresiones está en la figura 3.32. En la figura 3.33 está la red después de renombrar los nodos.

3.5.3. Preproceso de la lista de actividades previas

Antes de construir la red a partir de la lista de actividades previas es necesario verificar que la lista no da lugar a un circuito y que no hay información claramente redundante.

A_5, A_4, A_2

Figura 3.32.

A_5, A_4, A_2

Figura 3.33.

Círculo de actividades

Ejemplo 3.14. Considere la siguiente lista de actividades:

	τ	Actividades anteriores
A_1	11	
A_2	13	A_1, A_5
A_3	17	A_2
A_4	19	A_3, A_5
A_5	23	A_3

Es claro que la anterior lista de actividades previas no es adecuada. A_2 es requisito para A_3 ; A_3 es requisito para A_5 y A_5 es requisito para A_2 . \diamond

En esta etapa de preproceso, a partir de la lista de actividades previas, se construye un grafo donde a la actividad A_i se le hace corresponder el

nodo i . Si A_i es un requisito para A_j , entonces (i, j) es un arco del grafo. **Este grafo no debe tener circuitos.**

Para la lista de actividades del ejemplo, se obtiene el grafo de la figura 3.34.

3

Figura 3.34.

El camino $(2, 3, 5, 2)$ es un circuito. Esto se puede observar en la figura o se puede obtener como resultado del algoritmo de detección de circuitos. Al final de este algoritmo el diccionario de sucesores queda reducido a

1:	2
2:	3
3:	5
4:	
5:	2

Actividades previas redundantes

Si la actividad A_i es un requisito para la actividad A_j que a su vez es requisito para la actividad A_k , entonces, obviamente, A_i es un requisito para A_k , pero es **innecesario colocar a A_i como actividad anterior a A_k** .

Sea (V, A) el grafo (sin bucles) obtenido a partir de la precedencia entre las actividades (los nodos son las actividades), $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ su matriz nodo-nodo asociada y M^k la potencia k -ésima de M . El elemento m_{ij}^k indica el número de caminos de longitud k que van desde i hasta j (se supone que la longitud de cada arco es 1). Obviamente si $M^k = 0$, entonces $M^{k+1} = 0$.

Sea $2 \leq k \leq n - 1$ (con $M^k \neq 0$). Si

$$m_{ij} = 1 \quad \text{y} \quad m_{ij}^k > 0$$

entonces es redundante decir que la actividad i es requisito para la actividad j .

Ejemplo 3.15. Considere la siguiente lista de actividades previas.

	Actividades anteriores
A_1	
A_2	
A_3	A_1, A_2
A_4	A_2
A_5	A_2, A_3, A_4
A_6	A_3
A_7	A_1, A_3, A_6

La matriz asociada al grafo y algunas de sus potencias son:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$M^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Como $m_{17} = 1$ y $m_{17}^2 > 0$, entonces A_1 no es un requisito directo para A_7 . De manera análoga, son redundantes los arcos $(2, 5)$ y $(3, 7)$. Entonces la tabla de actividades previas es:

	Actividades anteriores
A_1	
A_2	
A_3	A_1, A_2
A_4	A_2
A_5	A_3, A_4
A_6	A_3
A_7	A_6

3.6. Árbol generador minimal

Una *red no dirigida* es un grafo no dirigido con una función de costo (o de longitud), o sea, es una tripla $R = (V, E, c)$, donde $G = (V, E)$ es un grafo no dirigido y c es una función de costo, $c : E \rightarrow \mathbb{R}$. El costo de la arista $a = \{i, j\}$ se denota de varias maneras: $c(a) = c_a = c(i, j) = c_{ij}$.

El costo de un grafo parcial o de un subgrafo es la suma del costo de las aristas. Un *árbol generador minimal* o *árbol generador mínimo*, AGM, (MST, *minimal spanning tree*) es un árbol $T = (V, E')$, generador de G , de costo mínimo. Algunas veces se habla, de manera precisa, de árbol generador de costo mínimo.

En un grafo no dirigido $G = (V, E)$, $D \subseteq E$ es un *conjunto desconectante* si $(V, E \setminus D)$ no es conexo. Un conjunto desconectante D es un *conjunto corte* si no tiene subconjuntos propios desconectantes. Sean X, Y , no vacíos, disyuntos, con $X \cup Y = V$, E_{XY} denota el conjunto de aristas con un elemento en X y el otro en Y . Como Y es el complemento, no vacío, de $X \neq \emptyset$, con respecto a V , basta con denotar $E_{X\bar{X}}$. Claramente $E_{X\bar{X}}$ es un conjunto desconectante pero no necesariamente un conjunto corte.

Algunos resultados sobre árboles son los siguientes (ver [Bal95]):

- *Un grafo es conexo si y solo si tiene un árbol generador.*
- *Sea $G = (V, E)$ un grafo no dirigido y $H = (V, E')$ un subgrafo. Si H cumple dos de las tres propiedades siguientes, entonces cumple la tercera.*
 1. *H es conexo.*
 2. *H no tiene ciclos.*
 3. *$|E'| = n - 1$.*

- *El conjunto desconectante E_{XY} es un conjunto corte si $(V, E \setminus E_{XY})$ tiene exactamente dos partes conexas.*
- *Si e es una arista de T un árbol generador del grafo no dirigido $G = (V, E)$, entonces al suprimir e en T quedan determinados de manera precisa dos conjuntos X, Y tales que E_{XY} es un conjunto corte.*
- *T es un AGM del grafo no dirigido con costo (V, E, c) si cada arista e de T es de costo mínimo en el conjunto corte definido por e .*

Ejemplo 3.16. Uno de los ejemplos típicos de AGM es análogo al siguiente. En el campus de la Universidad Nacional hay n edificios y se desea conectarlos con fibra óptica.

Para cada pareja de edificios (i, j) , se sabe si la conexión directa entre los dos edificios es viable o no. Cuando la conexión directa es viable, un estudio técnico evaluó el costo de la conexión directa.

Se desea conocer cómo debe ser el tendido de la fibra óptica de costo mínimo de tal forma que todos los edificios queden unidos. \diamond

3.6.1. Detección de un ciclo

Hay varios algoritmos para la detección de un ciclo en un grafo no dirigido. La versión presentada aquí es una adaptación del método de búsqueda a lo ancho BFS (breadth first search). La versión de BFS en [CLR90] sirve para encontrar la componente conexa asociada a un nodo i .

Empezando con un nodo cualquiera, por ejemplo el nodo 1, se marcan sus vecinos y después los vecinos de los nodos marcados. Se considera que un nodo ha sido estudiado cuando se han marcado sus vecinos. Cuando se estudian los vecinos del nodo u y $v \in \Gamma(u)$ ya había sido marcado antes y la marcación de u no fue hecha desde v , entonces el grafo tiene un ciclo.

Un nodo puede tener tres estados: no marcado, marcado pero no estudiado y estudiado. Algunas veces se utilizan colores: blanco, gris y negro. Aquí se utilizan los valores 0, 1, 2.

$$c(i) = \begin{cases} 0 & : i \text{ no ha sido marcado,} \\ 1 & : i \text{ fue marcado pero no estudiado,} \\ 2 & : i \text{ fue estudiado.} \end{cases}$$

También se requiere saber a partir de qué nodo se marca otro. Así, $p(j) = i$ indica que j fue marcado como vecino del nodo i . Inicialmente se asigna $p(i) = 0$ para todos los vértices.

En el algoritmo, Q es la lista (conjunto) de nodos marcados no estudiados. En la lista, los elementos están ordenados por orden de entrada.

```

datos:  $V, E, i_0$ 
 $c \leftarrow \mathbf{0}, p \leftarrow \mathbf{0}, Q \leftarrow \{i_0\}, c(i_0) \leftarrow 1$ 
mientras  $Q \neq \emptyset$ 
     $u \leftarrow Q_1$ 
    para  $v \in \Gamma(u)$ 
        si  $c(v) = 0$ 
             $c(v) \leftarrow 1$ 
             $p(v) \leftarrow u$ 
             $Q \leftarrow Q \cup \{v\}$ 
        sino
            si  $v \neq p(u)$ 
                 $\text{hay un ciclo, parar}$ 
            fin-si
        fin-si
    fin-para
     $c(u) \leftarrow 2$ 
     $Q \leftarrow Q \setminus \{Q_1\}$ 
fin-mientras
    No hay ciclos.

```

El algoritmo anterior sirve para saber si la componente conexa en la cual está el vértice i_0 tiene o no tiene ciclos. Si al final, no hay ciclos, entonces los vértices i tales que $c(i) > 0$ forman el conjunto que genera una componente conexa (sin ciclos) de G .

Obviamente si G es conexo, al usar el algoritmo anterior una vez se sabe si tiene o no tiene ciclos. Cuando G tiene varias componentes conexas (generalmente, no se sabe por anticipado), es necesario utilizar el algoritmo anterior varias veces, hasta detectar un ciclo o hasta asegurar que en todas las componentes no hay ciclos.

Ejemplo 3.17. Averiguar si el grafo (V, E) tiene ciclos, donde E está compuesto por las aristas:

$$\begin{aligned} &\{1, 3\} \\ &\{2, 4\} \\ &\{3, 4\} \\ &\{3, 5\} \\ &\{4, 6\} \\ &\{5, 6\} \\ &\{5, 7\} \\ &\{6, 8\} \end{aligned}$$

El diccionario de vecinos es:

i	$\Gamma(i)$
1	3
2	4
3	1, 4, 5
4	2, 3, 6
5	3, 6, 7
6	4, 5, 8
7	5
8	6

Estudio de $u = 1$. Nodo $v = 3$: $c(3) = 1, p(3) = 1$.

Estudio de $u = 3$. Nodo $v = 1$. Nodo $v = 4$: $c(4) = 1, p(4) = 3$. Nodo $v = 5$: $c(5) = 1, p(5) = 3$.

Estudio de $u = 4$. Nodo $v = 2$: $c(2) = 1, p(2) = 4$. Nodo $v = 3$. Nodo $v = 6$: $c(6) = 1, p(6) = 4$.

Estudio de $u = 5$. Nodo $v = 3$. Nodo $v = 6$. Hay un ciclo.

En el subgrafo definido por las aristas

$\{1, 3\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 2\}, \{4, 6\}, \{5, 6\}$

hay un ciclo. Ver figura 3.35.

Ejemplo 3.18. Averiguar si el grafo (V, E) tiene ciclos, donde E está compuesto por las aristas:

$$\begin{aligned} &\{5, 4\} \\ &\{6, 2\} \\ &\{9, 3\} \\ &\{5, 8\} \\ &\{3, 7\} \\ &\{1, 5\} \end{aligned}$$



Figura 3.35.

El diccionario de vecinos es:

i	$\Gamma(i)$
1	5
2	6
3	9, 7
4	5
5	4, 8, 1
6	2
7	3
8	5
9	3

Estudio de $u = 1$. Nodo $v = 5$. $c(5) = 1$, $p(5) = 1$.

Estudio de $u = 5$. Nodo $v = 4$. $c(4) = 1$, $p(4) = 5$; nodo $v = 8$. $c(8) = 1$, $p(8) = 5$; nodo $v = 1$.

Estudio de $u = 4$. Nodo $v = 5$.

Estudio de $u = 8$. Nodo $v = 5$.

No hay ciclo en la componente conexa generada por $\{1, 4, 5, 8\}$.

De manera análoga se obtiene la componente conexa generada por $\{2, 6\}$, que tampoco tiene ciclos.

Finalmente se obtiene la componente conexa generada por $\{3, 7, 9\}$, que tampoco tiene ciclos. \diamond

3.6.2. Algoritmo de Kruskal

Este algoritmo hace parte de los algoritmos voraces (“greedy”) para obtener un AGM de un grafo no dirigido conexo $G = (V, E)$. Su descripción es muy sencilla. La buena, regular o mala eficiencia del método depende fuertemente de la manera de implementar cada paso.

El AGM T se va construyendo iterativamente. Siempre $T = (V, F)$. Lo que realmente se construye iterativamente es el conjunto de aristas F . Como el conjunto de vértices de T es V , durante el proceso T se caracteriza simplemente por F . Por eso mismo se hablará de F como si fuera exactamente T .

1. Ordenar las aristas por orden creciente de costo en una lista L . $F \leftarrow \emptyset$.
2. $F \leftarrow F \cup \{L_1\}$. $L \leftarrow L \setminus \{L_1\}$
3. Si $|F| = n - 1$, entonces parar, ya que T es un árbol generador.
4. Si $|L| = 0$, entonces parar, G no es conexo.
5. Si $F \cup \{L_1\}$ no tiene ciclos, entonces $F \leftarrow F \cup \{L_1\}$, $L \leftarrow L \setminus \{L_1\}$ e ir al paso 3. Sino, $L \leftarrow L \setminus \{L_1\}$ e ir al paso 4.

Ejemplo 3.19. Construir un AGM del grafo no dirigido con costos, cuyas aristas y costos son:

$\{1, 2\}$,	8
$\{1, 3\}$,	10
$\{1, 7\}$,	10
$\{2, 4\}$,	3
$\{2, 8\}$,	2
$\{3, 4\}$,	5
$\{3, 5\}$,	2
$\{4, 6\}$,	1
$\{5, 6\}$,	7
$\{5, 7\}$,	12
$\{6, 8\}$,	4
$\{7, 8\}$,	9

Al ordenar las aristas de menos a mayor costo se obtiene:

$\{4, 6\}$
 $\{2, 8\}$
 $\{3, 5\}$
 $\{2, 4\}$
 $\{6, 8\}$
 $\{3, 4\}$
 $\{5, 6\}$
 $\{1, 2\}$
 $\{7, 8\}$
 $\{1, 3\}$
 $\{1, 7\}$
 $\{5, 7\}$

El árbol empieza con la arista $\{4, 6\}$.

$L_1 = \{2, 8\}$ se agrega a T .

$L_1 = \{3, 5\}$ se agrega a T .

$L_1 = \{2, 4\}$ se agrega a T .

$L_1 = \{6, 8\}$ haría ciclo.

$L_1 = \{3, 4\}$ se agrega a T .

$L_1 = \{5, 6\}$ haría ciclo.

$L_1 = \{1, 2\}$ se agrega a T .

$L_1 = \{7, 8\}$ se agrega a T .

Ya hay 7 aristas, luego se tiene un AGM de costo 30. Figura 3.36



Figura 3.36.

3.6.3. Algoritmo de Prim

Este también es un algoritmo voraz para obtener un AGM de un grafo no dirigido conexo $G = (V, E)$. En este algoritmo se van escogiendo los vértices de manera voraz. Recuérdese que en el algoritmo de Kruskal se escogen iterativamente las aristas.

El algoritmo empieza con un nodo cualquiera que va a ser el primer elemento de W . En cada iteración se busca la arista menos costosa entre aquellas que van de vértices de W a vértices en $V \setminus W$. Esa arista entra al árbol y el vértice que no estaba en W entra a W . El algoritmo acaba cuando T tiene $n - 1$ aristas, o sea, cuando W tiene n vértices.

El algoritmo se va guiando por el conjunto W y el árbol que se va construyendo se puede representar simplemente por su conjunto de aristas F . Para facilitar la implementación es conveniente ordenar las aristas de menor a mayor costo. De manera precisa el algoritmo es el siguiente:

```

datos:  $E, c, i_0$ 
 $W \leftarrow \{i_0\}$ 
 $F \leftarrow \emptyset$ 
mientras  $|W| < n$ 
    escoger  $a = \{i, j\} \in E, i \in W, j \notin W$  tal que:
     $c(a) = \min\{c(w, k) : \{w, k\} \in E_{W\bar{W}}\}$ 
    si  $E_{W\bar{W}} = \emptyset$ , ent  $G$  no es conexo.
     $W \leftarrow W \cup \{j\}$ 
     $F \leftarrow F \cup \{a\}$ 
fin-mientras

```

Ejemplo 3.20. Construir, a partir del nodo 1, un AGM del grafo no dirigido del ejemplo anterior. Al ordenar las aristas de acuerdo al costo se tiene:

$\{4, 6\}$	1
$\{2, 8\}$	2
$\{3, 5\}$	2
$\{2, 4\}$	3
$\{6, 8\}$	4
$\{3, 4\}$	5
$\{5, 6\}$	7
$\{1, 2\}$	8
$\{7, 8\}$	9
$\{1, 3\}$	10
$\{1, 7\}$	10
$\{5, 7\}$	12

$$W = \{1\}.$$

$$a = \{1, 2\}, \quad c(a) = 8, \quad W = \{1, 2\}, \quad F = \{\{1, 2\}\}.$$

$$a = \{2, 8\}, \quad c(a) = 2, \quad W = \{1, 2, 8\}, \quad F = \{\{1, 2\}, \{2, 8\}\}.$$

$$a = \{2, 4\}, \quad c(a) = 3, \quad W = \{1, 2, 8, 4\}, \quad F = \{\{1, 2\}, \{2, 8\}, \{2, 4\}\}.$$

$$a = \{4, 6\}, \quad c(a) = 1, \quad W = \{1, 2, 8, 4, 6\}, \quad F = \{\{1, 2\}, \{2, 8\}, \{2, 4\}, \{4, 6\}\}.$$

$$a = \{4, 3\}, \quad c(a) = 5, \quad W = \{1, 2, 8, 4, 6, 3\}, \\ F = \{\{1, 2\}, \{2, 8\}, \{2, 4\}, \{4, 6\}, \{4, 3\}\}.$$

$$a = \{3, 5\}, \quad c(a) = 2, \quad W = \{1, 2, 8, 4, 6, 3, 5\}, \\ F = \{\{1, 2\}, \{2, 8\}, \{2, 4\}, \{4, 6\}, \{4, 3\}, \{3, 5\}\}.$$

$$a = \{8, 7\}, \quad c(a) = 9, \quad W = \{1, 2, 8, 4, 6, 3, 5, 7\}, \\ F = \{\{1, 2\}, \{2, 8\}, \{2, 4\}, \{4, 6\}, \{4, 3\}, \{3, 5\}, \{8, 7\}\}. \quad \text{Figura 3.37}$$

Con implementaciones eficaces, el número de operaciones en el algoritmo de Kruskal es $O(m \log(n))$ y en el de Prim es $O(n^2)$. Ver [Pri90].

3.6.4. Versión matricial del algoritmo de Prim

La versión matricial se basa en la definición de una matriz $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ definida por

$$d_{ij} = \begin{cases} c_{ij} & \text{si } \{i, j\} \in E \text{ o } \{j, i\} \in E, \\ \infty & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

viñeta

Figura 3.37.

Por construcción, D es simétrica. Se utiliza además un sistema de marcas para las filas de D . Esta marcación se simbolizará por un vector $\mu \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ (realmente $\mu \in \{0, 1\}^{n \times 1}$),

$$\mu_i = \begin{cases} 1 & \text{si la fila } i \text{ está marcada,} \\ 0 & \text{si la fila } i \text{ no está marcada.} \end{cases}$$

Para facilitar la presentación del algoritmo, utilizaremos una función π que, a una matriz D y un vector columna μ , asigna la pareja (i, j) , posición del menor elemento de las filas marcadas de D :

$$(i, j) = \pi(D, \mu) \quad \text{si} \quad d_{ij} = \min\{d_{ks} : \mu_k = 1, s = 1, \dots, n\}.$$

Si x es un vector y κ una constante, la notación $x \leftarrow \kappa$ indica simplemente, $x_i \leftarrow \kappa$ para todo i .

Inicialmente ninguna fila está marcada. Sea i_0 el nodo escogido. Se marca la fila i_0 y para la columna i_0 , a todos sus elementos se les asigna ∞ .

Repetir hasta encontrar el AGM o hasta detectar que el grafo no es conexo el siguiente proceso: obtener, por π , la pareja (i, j) ; la arista $\{i, j\}$ hará parte del AGM; marcar la fila j ; para la columna j , a todos sus elementos se les asigna ∞ .

```

datos:  $G = (E, c)$ ,  $i_0$ 
construir  $D$ 
 $\mu \leftarrow 0$ 
 $\mu_{i_0} \leftarrow 1$ 
 $D_{i_0} \leftarrow \infty$ 
 $F \leftarrow \emptyset$ 
mientras  $|F| < n - 1$ 
   $(i, j) \leftarrow \pi(D, \mu)$ 
  si  $d_{ij} = \infty$ , ent  $G$  no es conexo, parar.
   $F \leftarrow F \cup \{(i, j)\}$ 
   $\mu_j \leftarrow 1$ 
   $D_{j,j} \leftarrow \infty$ 
fin-mientras

```

Ejemplo 3.21. Hallar un AGM para el grafo del ejemplo anterior.

$$D^0 = \begin{bmatrix} \infty & 8 & 10 & \infty & \infty & \infty & 10 & \infty \\ 8 & \infty & \infty & 3 & \infty & \infty & \infty & 2 \\ 10 & \infty & \infty & 5 & 2 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 3 & 5 & \infty & \infty & 1 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 2 & \infty & \infty & 7 & 12 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 1 & 7 & \infty & \infty & 4 \\ 10 & \infty & \infty & \infty & 12 & \infty & \infty & 9 \\ \infty & 2 & \infty & \infty & \infty & 4 & 9 & \infty \end{bmatrix}$$

$$i_0 = 1$$

$$D^1 = \begin{bmatrix} \infty & \boxed{8} & 10 & \infty & \infty & \infty & 10 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 3 & \infty & \infty & \infty & 2 \\ \infty & \infty & \infty & 5 & 2 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 3 & 5 & \infty & \infty & 1 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 2 & \infty & \infty & 7 & 12 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 1 & 7 & \infty & \infty & 4 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 12 & \infty & \infty & 9 \\ \infty & 2 & \infty & \infty & \infty & 4 & 9 & \infty \end{bmatrix} \quad \checkmark$$

$$F = \{\{1, 2\}\}.$$

$$D^2 = \begin{bmatrix} \infty & \infty & 10 & \infty & \infty & \infty & 10 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 3 & \infty & \infty & \infty & \boxed{2} \\ \infty & \infty & \infty & 5 & 2 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 5 & \infty & \infty & 1 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 2 & \infty & \infty & 7 & 12 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 1 & 7 & \infty & \infty & 4 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 12 & \infty & \infty & 9 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 4 & 9 & \infty \end{bmatrix} \quad \checkmark$$

$$F = \{\{1, 2\}, \{2, 8\}\}.$$

$$D^3 = \begin{bmatrix} \infty & \infty & 10 & \infty & \infty & \infty & 10 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \boxed{3} & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 5 & 2 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 5 & \infty & \infty & 1 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 2 & \infty & \infty & 7 & 12 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 1 & 7 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 12 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 4 & 9 & \infty \end{bmatrix} \quad \checkmark$$

$$F = \{\{1, 2\}, \{2, 8\}, \{2, 4\}\}.$$

$$D^4 = \begin{bmatrix} \infty & \infty & 10 & \infty & \infty & \infty & 10 & \infty \\ \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 2 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 5 & \infty & \infty & \boxed{1} & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 2 & \infty & \infty & 7 & 12 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 7 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 12 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 4 & 9 & \infty \end{bmatrix} \quad \checkmark$$

$$F = \{\{1, 2\}, \{2, 8\}, \{2, 4\}, \{4, 6\}\}.$$

$$D^5 = \begin{bmatrix} \infty & \infty & 10 & \infty & \infty & \infty & 10 & \infty \\ \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 2 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \boxed{5} & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 2 & \infty & \infty & \infty & 12 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 7 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 12 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 9 & \infty \end{bmatrix} \quad \checkmark$$

$$F = \{\{1, 2\}, \{2, 8\}, \{2, 4\}, \{4, 6\}, \{4, 3\}\}.$$

$$D^6 = \begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 10 & \infty \\ \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \boxed{2} & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 12 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 7 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 12 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 9 & \infty \end{bmatrix} \quad \checkmark$$

$$F = \{\{1, 2\}, \{2, 8\}, \{2, 4\}, \{4, 6\}, \{4, 3\}, \{3, 5\}\}.$$

$$D^7 = \begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 10 & \infty \\ \infty & \infty \\ \infty & \infty \\ \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 12 & \infty \\ \infty & \infty \\ \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \boxed{9} & \infty \end{bmatrix} \quad \checkmark$$

$$F = \{\{1, 2\}, \{2, 8\}, \{2, 4\}, \{4, 6\}, \{4, 3\}, \{3, 5\}, \{8, 7\}\}. \quad \diamond$$

Ejercicios

- 3.1** Considere el grafo cuyos arcos son: (2, 1), (3, 5), (4, 2), (4, 10), (10, 3), (1, 6), (5, 9), (6, 7), (9, 8), (7, 4), (8, 10). Halle los descendientes de 2, de 3 y de 4.

Respuesta: 2 es raíz; los descendientes de 3 son 3, 5, 9, 8, 10; 4 es raíz.

- 3.2** Considere el grafo cuyos arcos son: (1, 2), (2, 4), (2, 7), (3, 1), (3, 6), (4, 8), (5, 3), (5, 9), (6, 1), (6, 7), (7, 4), (7, 10), (9, 6), (9, 11), (10, 8), (11, 7), (11, 12), (12, 10). Averigüe si tiene circuitos.

Respuesta: no tiene circuitos.

- 3.3** Considere el grafo cuyos arcos son: (1, 2), (2, 4), (2, 7), (3, 1), (3, 6), (4, 8), (5, 3), (5, 9), (6, 1), (7, 4), (7, 10), (7, 6), (9, 6), (9, 11), (10, 8), (11, 7), (11, 12), (12, 10). Averigüe si tiene circuitos.

Respuesta: (7, 6, 1, 2, 7) es un circuito.

- 3.4** Halle el camino más corto y la menor distancia entre 1 y 5 en la red con los siguientes arcos y costos:

(1, 2)	6
(1, 3)	16
(1, 4)	12
(2, 4)	4
(2, 5)	12
(3, 5)	2
(4, 3)	4
(4, 6)	14
(5, 6)	4

Respuesta: el camino más corto es (1, 2, 4, 3, 5) con longitud 16.

- 3.5** Halle el flujo máximo y su valor en la red con los siguientes arcos y capacidades:

(1, 2)	9
(1, 3)	5
(1, 4)	4
(2, 5)	2
(2, 6)	3
(2, 8)	4
(3, 5)	4
(3, 6)	1
(3, 7)	3
(4, 7)	2
(4, 8)	2
(5, 9)	6
(6, 9)	2
(7, 9)	4
(8, 9)	6

Respuesta: $x_{12} = 8$, $x_{13} = 5$, $x_{14} = 4$, $x_{25} = 2$, $x_{26} = 2$, $x_{28} = 4$, $x_{35} = 4$, $x_{36} = 0$, $x_{37} = 1$, $x_{47} = 2$, $x_{48} = 2$, $x_{59} = 6$, $x_{69} = 2$, $x_{79} = 3$, $x_{89} = 6$, $v(x) = 17$.

- 3.6** Halle un flujo de valor 3, de costo mínimo, en la red con los siguientes arcos, capacidades, flujos y costos:

(i, j)	u_{ij}	x_{ij}	c_{ij}
$(1, 2)$	3	2	4
$(1, 3)$	2	1	1
$(2, 4)$	3	2	2
$(2, 5)$	2	1	1
$(3, 2)$	2	1	2
$(3, 5)$	1	0	2
$(4, 6)$	2	2	4
$(5, 4)$	1	0	2
$(5, 6)$	3	1	3

Respuesta: costo inicial = 27; flujo de costo mínimo: $x_{12} = 1$, $x_{13} = 2$, $x_{24} = 0$, $x_{25} = 2$, $x_{32} = 1$, $x_{35} = 1$, $x_{46} = 0$, $x_{54} = 0$, $x_{56} = 3$; costo mínimo = 21.

- 3.7** Halle el flujo máximo y su valor en la red con los siguientes arcos y capacidades:

$(1, 2)$	3
$(1, 3)$	2
$(2, 4)$	3
$(2, 5)$	2
$(3, 2)$	2
$(3, 5)$	1
$(4, 6)$	2
$(5, 4)$	1
$(5, 6)$	3

Respuesta: $x_{12} = 3$, $x_{13} = 2$, $x_{24} = 2$, $x_{25} = 2$, $x_{32} = 1$, $x_{35} = 1$, $x_{46} = 2$, $x_{54} = 0$, $x_{56} = 3$, $v(x) = 5$.

- 3.8** Halle un flujo de valor 5, de costo mínimo, en la red con los siguientes arcos, capacidades, flujos y costos (resultado del ejercicio anterior):

(i, j)	u_{ij}	x_{ij}	c_{ij}
(1, 2)	3	3	4
(1, 3)	2	2	1
(2, 4)	3	2	2
(2, 5)	2	2	1
(3, 2)	2	1	2
(3, 5)	1	1	2
(4, 6)	2	2	4
(5, 4)	1	0	2
(5, 6)	3	3	3

Respuesta: el flujo es de costo mínimo.

3.9 Halle la duración del proyecto, las holguras y las actividades críticas.

	τ	Actividades anteriores
A_1	4	
A_2	4	A_1
A_3	48	A_2
A_4	8	A_3
A_5	12	A_4
A_6	4	A_5
A_7	12	A_4
A_8	16	A_4
A_9	4	A_8
A_{10}	8	A_9
A_{11}	8	A_6
A_{12}	4	A_{11}
A_{13}	8	A_7, A_{10}, A_{12}
A_{14}	4	A_{13}
A_{15}	8	A_{14}
A_{16}	4	A_{13}
A_{17}	4	A_{15}
A_{18}	4	A_{17}
A_{19}	8	A_{17}
A_{20}	2	A_{16}
A_{21}	1	A_{18}, A_{20}
A_{22}	0.5	A_{19}, A_{20}
A_{23}	2	A_{18}, A_{19}

Respuesta: el proyecto dura 126 días. Las únicas holguras no nulas son: $h_7 = 16$, $h_{16} = 18$, $h_{18} = 4$, $h_{20} = 18$, $h_{21} = 5$, $h_{22} = 1.5$.

- 3.10** Halle la duración del proyecto, las holguras y las actividades críticas.

	τ	Actividades anteriores
A_1	64	
A_2	28	A_1
A_3	12	A_1
A_4	28	A_1
A_5	8	A_3, A_4, A_2
A_6	16	A_5
A_7	4	A_5
A_8	4	A_6
A_9	8	A_6
A_{10}	2	A_7
A_{11}	1	A_8, A_{10}
A_{12}	0.5	A_9, A_{10}
A_{13}	2	A_8, A_9

Respuesta: el proyecto dura 126 días. Las únicas holguras no nulas son: $h_3 = 16$, $h_7 = 18$, $h_8 = 4$, $h_{10} = 18$, $h_{11} = 5$, $h_{12} = 1.5$.

- 3.11** Halle la duración del proyecto, las holguras y las actividades críticas.

	τ	Actividades anteriores
A_1	16	por lo menos 5 días después del comienzo
A_2	14	
A_3	20	por lo menos 3 días después del comienzo
A_4	8	A_1, A_2
A_5	18	A_2
A_6	25	A_2, A_3
A_7	15	A_4, A_5, A_6
A_8	17	A_5 , la primera mitad de A_3
A_9	10	A_4, A_5, A_6

Respuesta: el proyecto dura 63 días. Las únicas holguras no nulas son: $h_1 = 19$, $h_2 = 9$, $h_4 = 19$, $h_5 = 14$, $h_8 = 14$, $h_9 = 5$.

- 3.12** Encuentre un árbol generador minimal, por los dos métodos, en el grafo definido por las siguientes aristas y costos:

$\{6, 5\}$,	20
$\{5, 2\}$,	18
$\{8, 7\}$,	8
$\{6, 8\}$,	5
$\{4, 7\}$,	18
$\{3, 1\}$,	14
$\{7, 6\}$,	13
$\{7, 3\}$,	19
$\{4, 5\}$,	11
$\{1, 6\}$,	14
$\{8, 4\}$,	12
$\{5, 7\}$,	1
$\{3, 8\}$,	12
$\{5, 3\}$,	16

Respuesta: una arbol generador minimal está formado por las aristas $(1, 6)$, $(2, 5)$, $(3, 8)$, $(4, 5)$, $(5, 7)$, $(6, 8)$, $(7, 8)$. Su costos es 69.

Capítulo 4

Optimización no diferenciable

4.1. Introducción

4.1.1. Ejemplos de problemas de OND

Ejemplo 4.1. Problema de localización. Sean a^1, a^2, \dots, a^p puntos conocidos en \mathbb{R}^n . Se desea encontrar un punto x en \mathbb{R}^n tal que la suma de las distancias de x a los puntos sea mínima.

$$\min f(x) = \sum_{i=1}^p \|x - a^i\|_2. \quad \diamond$$

Ejemplo 4.2. Un sistema de tasa y sobretasa puede estar modelado por la función

$$T(i) = \begin{cases} r_0 i & \text{si } 0 \leq i \leq a, \\ r_0 a + r_1(i-a) & \text{si } i > a, \end{cases}$$

donde $r_0 < r_1$ son la tasa y la sobretasa. Claramente T es continua pero no es diferenciable en $x = a$. Un problema de optimización donde se use T posiblemente sea un problema de OND. Por ejemplo, dados $a_0, a_1, C, u_1, u_2, v_1, v_2$,

$$\begin{aligned} \min f(x_1, x_2) &= T(x_1) + T(x_2) \\ x_1 + x_2 &= C \\ u_1 \leq x_1 &\leq v_1 \\ u_2 \leq x_2 &\leq v_2. \quad \diamond \end{aligned}$$

Ejemplo 4.3. Sean f_1, f_2, \dots, f_m funciones convexas y diferenciables,

$$\min f(x) = \max\{f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)\}.$$

La función f es convexa pero posiblemente no es diferenciable. \diamond

Ejemplo 4.4. Sean f_1, f_2, \dots, f_m funciones convexas y diferenciables,

$$\begin{aligned} \min f(x) &= \|(f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x))\|_1, \\ \min f(x) &= \|(f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x))\|_\infty \quad \diamond \end{aligned}$$

Ejemplo 4.5. Sea $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{m \times m}$ diferenciable (con otras propiedades adicionales),

$$\begin{aligned} \min f(x) &= \|g(x)\|_1, \\ \min f(x) &= \|g(x)\|_\infty. \end{aligned}$$

La norma euclídea tampoco es diferenciable, pero generalmente este inconveniente se salta utilizando el cuadrado. \diamond

Ejemplo 4.6. Programación semidefinida, SDP. Dadas $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n$ matrices simétricas $p \times p$, se buscan escalares x_1, x_2, \dots, x_n para minimizar una función lineal con la restricción de que una matriz sea semidefinida positiva:

$$\begin{aligned} \min & c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \\ A_0 + x_1A_1 + x_2A_2 + \dots + x_nA_n & \succeq 0 \quad \diamond \end{aligned}$$

Ejemplo 4.7. La *relajación lagrangiana* es una de las fuentes más importantes de problemas de OND. Consideremos un problema de ONL

$$\begin{aligned} \min & f(x) \\ g(x) & \leq 0, \\ x & \in X, \end{aligned}$$

donde $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$. Cuando hay restricciones “complicadas”, éstas se pueden eliminar mediante la relajación pero se obtiene un problema no diferenciable. Supongamos que las restricciones g son difíciles y que las que definen X son fáciles, entonces la relajación del problema anterior es

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) + \lambda^T g(x) \\ x \in & X. \end{aligned}$$

Sea

$$\phi(\lambda) = \min\{f(x) + \lambda^T g(x) : x \in X\}.$$

El problema dual del problema inicial de ONL es:

$$\begin{aligned} \max \quad & \phi(\lambda) \\ \lambda \geq & 0, \end{aligned}$$

equivalente a

$$\begin{aligned} \min \quad & -\phi(\lambda) \\ \lambda \geq & 0. \end{aligned}$$

Este problema es convexo (la función es convexa y el conjunto admisible también), generalmente no diferenciable y con frecuencia se puede resolver más fácilmente. ◇

Los métodos de descomposición están relacionados con la relajación lagrangiana. Los problemas de gran tamaño poseen generalmente una estructura que permite considerar varios problemas pequeños. Los problemas pequeños no son completamente independientes, normalmente están relacionados por algunas restricciones.

4.1.2. Algunos conceptos

Sea C un subconjunto de \mathbb{R}^n (o de un espacio vectorial). Se dice que C es *convexo* si al tomar dos puntos en C , entonces los puntos del segmento que los une también están en C . Es decir, para todo $x, y \in C$ y para todo $\lambda \in [0, 1]$,

$$(1 - \lambda)x + \lambda y \in C.$$

n~~o~~convexo

Figura 4.1.

Si $A \subseteq \mathbb{R}^n$, se denota por $\text{co}(A)$ al convexo más pequeño que contiene a A (o convexo generado por A o la envolvente convexa de A), es decir,

$$\begin{aligned}\text{co}(A) &\text{ es convexo,} \\ A &\subseteq \text{co}(A), \\ A \subseteq C \text{ convexo} &\Rightarrow \text{co}(A) \subseteq C.\end{aligned}$$

Este conjunto se puede caracterizar de dos maneras:

$$\begin{aligned}\text{co}(A) &= \bigcap_{A \subseteq C \text{ convexo}} C \\ \text{co}(A) &= \left\{ \sum_{i=1}^k \lambda_i x^i : k \geq 1, x^i \in A, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1 \right\}\end{aligned}$$

Se dice que una función $f : C \rightarrow \mathbb{R}$, con C convexo y no vacío, es *convexa*, si al tomar dos puntos de la gráfica de f , los puntos del segmento que los une quedan por encima o coinciden con los de la gráfica. Es decir, para todo $x, y \in C$ y para todo $\lambda \in [0, 1]$,

$$f((1 - \lambda)x + \lambda y) \leq (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y).$$

Un vector $d \neq 0$ es *dirección de descenso de f en \bar{x}* si existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$f(\bar{x} + td) < f(\bar{x}) \text{ para todo } t \in]0, \varepsilon[.$$

4.1.3. Formas generales

Un problema de OND se puede escribir en una de las formas siguientes:

$$\min f(x) \tag{4.1}$$

no convexa

Figura 4.2.

$$x \in \mathbb{R}^n,$$

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ x \in \mathcal{A}, \end{aligned} \tag{4.2}$$

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ g_1(x) \leq 0 \\ g_2(x) \leq 0 \\ & \vdots \\ g_m(x) \leq 0 \end{aligned} \tag{4.3}$$

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ g(x) \leq 0 \end{aligned} \tag{4.4}$$

donde \mathcal{A} es convexo, las funciones $f, g_1, g_2, \dots, g_m, g$, de variable vectorial y valor real, son convexas y por lo menos alguna de ellas no es diferenciable. En realidad se trata de un problema de **optimización convexa no diferenciable**. La palabra convexa no se usa explícitamente, pero se supone. En general, \mathcal{A} denotará el conjunto de puntos factibles, es decir, dependiendo del problema, puede ser \mathbb{R}^n , un conjunto convexo o el conjunto de puntos que satisfacen todas las desigualdades $g_i(x) \leq 0$.

Un problema en la forma (4.4) es un caso particular de (4.3). A su vez, un problema en la forma (4.3) se puede convertir en uno de la forma (4.4), utilizando

$$g(x) = \max\{g_1(x), g_2(x), \dots, g_m(x)\}.$$

Usualmente f es C^1 por pedazos, es decir, \mathcal{A} se puede dividir en partes tales que en el interior de cada una de ellas el gradiente $f'(x)$ existe y es continuo.

El valor óptimo de f y el conjunto de puntos óptimos se denotarán por:

$$f^* = \min\{f(x) : x \in \mathcal{A}\} \quad \text{si existe,}$$

$$F^* = \{x \in \mathcal{A} : f(x) = f^*\}.$$

4.1.4. Subgradiente, subdiferencial, optimalidad

En la definición de función convexa no hay nada relativo a continuidad. Sin embargo se puede mostrar que *toda función convexa $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ es continua en el interior de C* . En cambio la diferenciabilidad no se puede garantizar. El ejemplo más sencillo es el de la función valor absoluto que es convexa pero no es diferenciable en $x = 0$.

Ahora bien, si f es convexa y diferenciable en un punto \bar{x} , entonces la gráfica de p_1 , aproximación de primer orden de f alrededor de \bar{x} , o aproximación afín, siempre queda por debajo o coincide con la gráfica de f , es decir,

$$p_1(x) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})^T(x - \bar{x}) \leq f(x) \quad \forall x \in C.$$

$$y = p_1(x)$$

Figura 4.3.

Más aún, si f es diferenciable y C es un convexo abierto, entonces el cumplimiento de la desigualdad anterior para todo x y \bar{x} en C es una condición necesaria y suficiente para la convexidad de f .

Cuando f no es diferenciable en \bar{x} , entonces no se tiene “la” aproximación de primer orden de f . Si f es convexa y no diferenciable en \bar{x} , puede haber

varias aproximaciones de primer orden que pasan por $(\bar{x}, f(\bar{x}))$ y quedan por debajo de f .

$$y = \mathbf{f}(x)$$

Figura 4.4.

Un vector γ es *subgradiente* de la función convexa f en \bar{x} si

$$f(\bar{x}) + \gamma^T(x - \bar{x}) \leq f(x), \quad \forall x \in \mathcal{A}.$$

El conjunto de todos los subgradientes de f en un punto \bar{x} se llama el *subdiferencial* de f en \bar{x} y se denota por

$$\partial f(\bar{x}) = \{\gamma : \gamma \text{ es subgradiente de } f \text{ en } \bar{x}\}.$$

Un punto x donde f no es diferenciable se llama un “kink” o “torcedura”.

Ejemplo 4.8.

$$f(x) = \frac{1}{2}(x - 1) + |x - 1| + 2, \quad \text{Figura 4.5}$$

$$\begin{aligned} \partial f(-2) &= \{-1/2\}, \\ \partial f(1) &= [-1/2, 3/2], \\ \partial f(2) &= \{3/2\}. \quad \diamond \end{aligned}$$

Ejemplo 4.9.

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= \frac{1}{2}(x_1 - 1) + |x_1 - 1| + 2 + 3x_2, \\ \partial f(x_1, x_2) &= \begin{cases} \{(-1/2, 3)\} & \text{si } x_1 < 1, \\ \{(t, 3) : t \in [-1/2, 3/2]\} & \text{si } x_1 = 1, \\ \{(3/2, 3)\} & \text{si } x_1 > 1. \end{cases} \end{aligned}$$

4.1.5. Algunos resultados

Una dirección $d \neq 0$ es *admisible* en el punto $\bar{x} \in \mathcal{A}$, si existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$\bar{x} + td \in \mathcal{A} \text{ para todo } t \in [0, \varepsilon].$$

Si el límite existe, la derivada direccional de f en $\bar{x} \in \mathcal{A}$, en la dirección admisible d , está dada por

$$f'(\bar{x}, d) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(\bar{x} + td) - f(\bar{x})}{t}.$$

Un punto x es *estacionario* si $0 \in \partial f(x)$.

■ Si $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ es convexa, $\bar{x} \in \mathcal{A}$ y d es dirección admisible, entonces $f'(\bar{x}, d)$ existe.

■ Si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es convexa, entonces

$$\begin{aligned} \partial f(\bar{x}) &\neq \emptyset, \\ \partial f(\bar{x}) &\text{ es convexo.} \end{aligned}$$

■ Si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es convexa y diferenciable en \bar{x} , entonces

$$\partial f(\bar{x}) = \{f'(\bar{x})\}.$$

■ Si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es convexa, entonces las tres afirmaciones siguientes son equivalentes

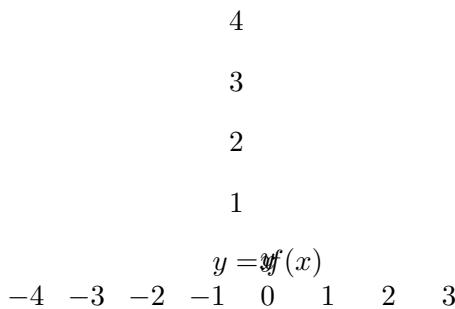


Figura 4.5.

- $\bar{x} \in F^*$,
- $0 \in \partial f(\bar{x})$,
- $f'(\bar{x}; d) \geq 0$, para todo $d \in \mathbb{R}^n$.
- $\gamma \in \partial f(x)$ sssi $\gamma^T d \leq f'(x; d)$ para todo $d \in \mathbb{R}^n$.
- $\partial f(x) = \text{co}(S)$, donde

$$S = \left\{ \lim_{x^k \rightarrow x} f'(x^k) : f'(x^k) \text{ y el límite existen} \right\}$$

- Una función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ convexa es diferenciable en casi todas partes (el conjunto de “kinks” es de medida nula).
- $d \neq 0$ es dirección de descenso de f (convexa) en x sssi $f'(x; d) < 0$.
- Si $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ son convexas, entonces

$$\partial(f + g)(x) = \partial f(x) + \partial g(x).$$

En otras palabras el segundo resultado dice que si f es convexa, entonces para cada $\bar{x} \in C$ existe por lo menos una aproximación de primer orden (función afín cuya gráfica pasa por $(\bar{x}, f(\bar{x}))$) inferior o igual a f .

Para A y B subconjuntos de un espacio vectorial

$$A + B = \{x + y : x \in A, y \in B\}.$$

4.2. Métodos de OND

En OND es usual suponer que se conoce una caja negra u oráculo que, dado x , puede calcular $f(x)$ y un subgradiente $\gamma \in \partial f(x)$. El oráculo puede estar dado por una función o por un programa. Figura (4.6)

La primera aproximación a la solución sería utilizar los métodos para optimización diferenciable (Newton, cuasiNewton, descenso más pendiente, ...), pero esto puede dar resultados catastróficos. En realidad hay dos clases de métodos. Los métodos directos que tienen en cuenta la no diferenciabilidad y los métodos que tratan de suavizar el problema para aplicar métodos de optimización diferenciable (este proceso se puede repetir varias veces).

Dentro de los métodos directos, el más simple es el **método del subgradiente**, donde dado un punto x^k se toma como dirección uno de los subgradientes

ORÁCULO

Figura 4.6.

$$\begin{aligned} d^k &= -\gamma^k, \quad \gamma^k \in \partial f(x^k), \\ x^{k+1} &= x^k + t_k d^k. \end{aligned}$$

El subgradiente utilizado (uno de los posibles), dado por el oráculo, puede no ser una dirección de descenso. Además generalmente la convergencia es muy lenta.

Otro de los métodos directos es el **método del elipsoide** de Nemirovski, Yudin, Levin, Shor. Generalmente su efectividad práctica es mediocre.

4.3. Método de planos cortantes

El método del plano cortante de Kelley, MPC, [Kel60] y Cheney Goldstein [ChG59] sirve para optimización convexa, no necesariamente diferenciable.

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ \text{s.t.} \quad & g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m, \end{aligned}$$

donde f, g_i son convexas. Se usa el siguiente resultado [HiL93].

Sean $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ convexa y $x \in \mathbb{R}^n$. Entonces

$$f(x) = \max_{y \in \mathbb{R}^n} \{f(y) + \gamma^T(x - y) : \gamma \in \partial f(y)\}.$$

Sean $x^1, x^2, \dots, x^k \in \mathbb{R}^n$,

$$\check{f}(x) = \max_{1 \leq i \leq k} \{f(x^i) + \gamma^{i^T}(x - x^i) : \gamma^i \in \partial f(x^i)\},$$

llamada *aproximación afín* (o “lineal”) por trozos y tangencial de f (figura 4.7). Obviamente

$$\check{f}(x) \leq f(x).$$

$$y \equiv \check{f}(x)$$

Figura 4.7.

4.3.1. Problema no restringido

Consideremos inicialmente el problema no restringido

$$\min f(x). \quad (4.5)$$

Si éste se reemplaza por

$$\min \check{f}(x) \quad (4.6)$$

se obtiene una *relajación* del problema. Sea $v = \check{f}(x)$, entonces

$$\begin{aligned} v &\geq f(x^1) + \gamma^{1^T}(x - x^1), \\ &\vdots \\ v &\geq f(x^k) + \gamma^{k^T}(x - x^k). \end{aligned}$$

Una formulación equivalente a la relajación (4.6) es el siguiente problema de OL

$$\min_{x,v} v$$

$$\begin{aligned}
 v &\geq f(x^1) + \gamma^{1^T}(x - x^1), \\
 &\vdots \\
 v &\geq f(x^k) + \gamma^{k^T}(x - x^k).
 \end{aligned}$$

Este problema se puede escribir de forma más convencional

$$\begin{aligned}
 \min_{x,v} \quad & 0^T x + v \\
 \text{s.t.} \quad & \gamma^{1^T} x - v \leq \gamma^{1^T} x^1 - f(x^1) \\
 & \vdots \\
 & \gamma^{k^T} x - v \leq \gamma^{k^T} x^k - f(x^k).
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

Sea (x^{k+1}, v_{k+1}) , solución del problema anterior. Si

$$v_{k+1} = f(x^{k+1})$$

entonces se tiene la solución del problema inicial. Sino, se agrega a la definición de \check{f} otra función afín

$$x \mapsto f(x^{k+1}) + \gamma^{k+1^T}(x - x^{k+1}).$$

Esto se traduce por otra restricción:

$$v \geq f(x^{k+1}) + \gamma^{k+1^T}(x - x^{k+1}),$$

que también se puede escribir

$$\gamma^{k+1^T} x - v \leq \gamma^{k+1^T} x^{k+1} - f(x^{k+1}). \tag{4.8}$$

Esta restricción recibe el nombre de *corte de optimalidad*. El método anterior es convergente. Si f está definida por un número finito de partes lineales (o afines), entonces el método acaba en un número finito de pasos.

Para garantizar que el problema (4.7) tenga solución finita, se agregan restricciones de caja para x y cota inferior para v (no es necesario colocar una cota superior para v).

$$\begin{aligned}
 u_1 &\leq x_1 \leq w_1 \\
 u_2 &\leq x_2 \leq w_2 \\
 &\vdots
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

$$\begin{aligned} u_n &\leq x_n \leq w_n \\ \underline{v} &\leq v \end{aligned}$$

Estas cotas deben ser suficientemente amplias pero es innecesario que lo sean demasiado. Es posible que después de un número suficiente de iteraciones, las restricciones de caja no sean necesarias. En lo que sigue, B denotará el conjunto de puntos (x, v) que satisfacen las restricciones de caja. Así el problema de OL que se resuelve en cada iteración es

$$\begin{aligned} \min_{x,v} \quad & 0^T x + v \\ \gamma^{1^T} x - v &\leq \gamma^{1^T} x^1 - f(x^1) \\ &\vdots \\ \gamma^{k^T} x - v &\leq \gamma^{k^T} x^k - f(x^k) \\ (x, v) &\in B. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Si $\xi = (x, v) \in \mathbb{R}^{n+1}$, el problema anterior se puede escribir de manera compacta

$$\begin{aligned} \min \quad & \xi_{n+1} \\ M\xi &\leq c. \end{aligned}$$

En la primera iteración

$$M = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ -I_n & 0 \\ 0 & -1 \\ \gamma^{1^T} & -1 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} w \\ -u \\ -v \\ \alpha \end{bmatrix},$$

con $\alpha = \gamma^{1^T} x^1 - f(x^1)$. El esquema general del algoritmo para el método de planos de corte no restringido es:

MÉTODO DE PLANOS DE CORTE NO RESTRINGIDO

datos: $f, x^1, u, w, \underline{v}, \varepsilon, MAXIT$, tales que $u \leq x^1 \leq w$
 las restricciones iniciales son las de caja
 $v_1 \leftarrow -\infty$
para $k = 1, \dots, MAXIT$
 con x^k el oráculo proporciona: $f(x^k), \gamma \in \partial(f, x^k)$
si $f(x^k) - v_k \leq \varepsilon$, **parar**
 $\alpha \leftarrow \gamma^T x^k - f(x^k)$
 agregar el corte $\gamma^T x - v \leq \alpha$
 obtener (x^{k+1}, v_{k+1}) solución de (4.10)
fin-para

Ejemplo 4.10. Aplicar el método de planos de corte al problema de localización con los puntos

$$\begin{aligned} a^1 &= (-4, -3), \\ a^2 &= (-1, -2), \\ a^3 &= (-2, -8), \end{aligned}$$

y con los datos iniciales

$$\begin{aligned} x^1 &= (-1, -1), \\ u &= (-8, -8), \\ w &= (0, 0), \\ \underline{v} &= 1, \\ \varepsilon &= 10^{-6}. \end{aligned}$$

Sea a un punto de \mathbb{R}^n y

$$\varphi(x) = \|x - a\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n (x_i - a_i)^2 \right)^{1/2}$$

En los puntos donde φ es diferenciable, el único subgradiente es el gradiente. Donde no es diferenciable se puede tomar el vector nulo.

$$\gamma(\varphi, x) = \begin{cases} \frac{x - a}{\varphi(x)} & \text{si } x \neq a, \\ 0 & \text{si } x = a. \end{cases}$$

Para

$$f(x) = \sum_{i=1}^p ||x - a^i||_2$$

entonces

$$\gamma(f, \bar{x}) = \sum_{i=1}^p \gamma(||x - a^i||_2, \bar{x})$$

$$f(x^1) = 11.6766, \\ \gamma^1 = (0.9735, 2.5446).$$

En la primera iteración

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0.9735 & 2.5446 & -1 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \\ 8 \\ -1 \\ -15.1947 \end{bmatrix}.$$

k	x_1^k	x_2^k	v_k	$f(x^k)$	γ_1	γ_2	α
1	-1.0000	-1.0000	-1000000	11.6766	0.9735	2.5446	-15.1947
2	0.0000	-5.5783	1.0000	11.6151	1.7465	-0.7338	-7.5217
3	-8.0000	-2.5178	1.0000	19.1755	-2.7283	0.7204	0.8373
4	-2.8468	-3.0116	4.7599	8.3187	-0.0444	0.4954	-9.6841
5	-4.2835	-8.0000	5.9114	14.1312	-1.5367	-1.8756	7.4561
6	-2.6218	-5.5790	7.0369	9.3531	-0.1902	-0.8242	-4.2559
7	-1.5020	-3.9475	7.7953	8.7658	0.8074	-0.3305	-8.6740
8	-2.5311	-3.8339	7.8974	8.2779	0.1023	-0.2693	-7.5042
9	-4.1773	-3.6521	8.0606	9.1195	-1.5974	-0.5321	-0.5034
10	-3.5722	-3.5360	8.0912	8.4145	-0.5670	-0.3511	-5.1478
11	-3.1003	-3.4454	8.1151	8.2391	-0.1624	-0.0385	-7.6029
22	-2.7653	-3.4505	8.2123	8.2125	0.0009	0.0086	-8.2446
23	-2.7687	-3.4615	8.2124	8.2125	-0.0015	-0.0020	-8.2015
24	-2.7551	-3.4587	8.2125	8.2125	0.0053	0.0016	-8.2325
25	-2.7637	-3.4567	8.2125	8.2125	0.0013	0.0028	-8.2257
26	-2.7607	-3.4622	8.2125	8.2125	0.0023	-0.0021	-8.2116
27	-2.7647	-3.4600	8.2125	8.2125	0.0006	-0.0003	-8.2131
28	-2.7697	-3.4571	8.2125	8.2125	-0.0017	0.0020	-8.2150
29	-2.7679	-3.4592	8.2125	8.2125	-0.0009	0.0002	-8.2105
30	-2.7658	-3.4580	8.2125	8.2125	0.0002	0.0015	-8.2181

En cada iteración, el corte que se agrega es $\gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 - v \leq \alpha$.

La solución del problema de localización con tres puntos de \mathbb{R}^2 no aliñeados tiene una propiedad geométrica interesante: la medida del ángulo $\angle a^i x a^j$, con $i \neq j$, es de 120 grados. \diamond

4.3.2. Problema restringido

Muchos de los problemas de optimización (no lineal) diferenciable, se escriben en la forma:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ & g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m, \end{aligned}$$

donde las funciones f, g_i son diferenciables. El problema anterior también se escribe usualmente

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ & \mathbf{g}(x) \leq 0, \end{aligned}$$

donde $\mathbf{g} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ es diferenciable.

Consideremos un problema de OND en la forma 4.4, es decir, con una sola restricción

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ & g(x) \leq 0, \end{aligned} \tag{4.11}$$

donde f y g son funciones (de variable vectorial y valor real) convexas. Para resolver el problema anterior, éste se remplaza por una relajación, se cambian f y g por aproximaciones afines por trozos,

$$\begin{aligned} \min \quad & \check{f}(x) \\ & \check{g}(x) \leq 0. \end{aligned} \tag{4.12}$$

De manera más precisa, sean x^1, x^2, \dots, x^k en \mathbb{R}^n ,

$$\begin{aligned} K &= \{1, 2, \dots, k\}, \\ K &= I_k \cup J_k, \\ I_k \cap J_k &= \emptyset, \\ \check{f}_{J_k}(x) &= \max_{i \in J_k} \{f(x^i) + \gamma(f, x^i)^T(x - x^i)\}, \end{aligned}$$

$$\check{g}_{I_k}(x) = \max_{i \in I_k} \{g(x^i) + \gamma(g, x^i)^T(x - x^i)\},$$

entonces se va a encontrar la solución de

$$\begin{aligned} \min_{x,v} \quad & \check{f}_{J_k}(x) \\ & \check{g}_{I_k}(x) \leq 0. \end{aligned} \tag{4.13}$$

De nuevo, haciendo $v = \check{f}_{J_k}(x)$, el problema anterior se convierte en

$$\begin{aligned} \min_{x,v} \quad & v \\ & v \geq f(x^i) + \gamma(f, x^i)^T(x - x^i), \quad i \in J_k, \\ & 0 \geq g(x^i) + \gamma(g, x^i)^T(x - x^i), \quad i \in I_k. \end{aligned}$$

Escribiendo en la forma usual,

$$\begin{aligned} \min_{x,v} \quad & 0^T x + v \\ & \gamma(f, x^i)^T x - v \leq \gamma(f, x^i)^T x^i - f(x^i), \quad i \in J_k, \\ & \gamma(g, x^i)^T x \leq \gamma(g, x^i)^T x^i - g(x^i), \quad i \in I_k. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Para garantizar la existencia de solución finita se utilizan las restricciones de caja (4.9) y B denota el conjunto de puntos que las cumplen. Así el problema de OL es

$$\begin{aligned} \min_{x,v} \quad & 0^T x + v \\ & \gamma(f, x^i)^T x - v \leq \gamma(f, x^i)^T x^i - f(x^i), \quad i \in J_k, \\ & \gamma(g, x^i)^T x \leq \gamma(g, x^i)^T x^i - g(x^i), \quad i \in I_k, \\ & (x, v) \in B. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Para completar la descripción del método, es necesario precisar la construcción de I_k y J_k . El conjunto I_k tiene los índices de los puntos no factibles y J_k los índices de los puntos factibles,

$$\begin{aligned} I_k &= \{1 \leq i \leq k : g(x^i) > 0\}, \\ J_k &= \{1 \leq i \leq k : g(x^i) \leq 0\}. \end{aligned}$$

Cuando x^i no es factible, se tiene un “punto” de I (punto cuyo superíndice está en I) y se construye un *corte de factibilidad*. Cuando x^i es factible, se tiene un “punto” de J (punto cuyo superíndice está en J) y se construye

un corte de optimalidad. El oráculo sigue teniendo una entrada, pero ahora tiene tres salidas: $\chi_F(x)$ (la función indicatriz de F indica si el punto está en F o no), el valor $g(x)$ o $f(x)$ y un subgradiente de g o de f (figura 4.8). De manera más precisa, el oráculo produce $\chi_F(x)$, $h(x)$ y γ ,

$$\begin{aligned} \text{si } g(x) > 0, \text{ entonces } \chi_F(x) &= 0, \\ h(x) &= g(x), \\ \gamma &= \gamma(g, x), \\ \text{si } g(x) \leq 0, \text{ entonces } \chi_F(x) &= 1, \\ h(x) &= f(x), \\ \gamma &= \gamma(f, x). \end{aligned}$$

También se puede tener, en lugar de un solo oráculo, dos oráculos, uno para f y otro para g .

ORÁCULO

Figura 4.8.

La interpretación geométrica de los cortes de factibilidad tiene que ver con una aproximación exterior del conjunto factible

$$F = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) \leq 0\}.$$

Sea $\bar{B} \subseteq \mathbb{R}^n$ la restricción de $B \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ a las variables x_j , es decir,

$$B = \bar{B} \times [\underline{v}, \infty[.$$

Si al problema relajado (4.13) se le agregan las restricciones de caja para x se tiene

$$\begin{aligned} \min \quad & \check{f}_{J_k}(x) \\ \check{g}_{I_k}(x) & \leq 0 \\ x & \in \bar{B}, \end{aligned} \tag{4.16}$$

o también

$$\begin{aligned} \min \quad & \check{f}_{J_k}(x) \\ & x \in F_k, \end{aligned} \tag{4.17}$$

donde

$$F_k = \bar{B} \cap \{x : \check{g}_{I_k}(x) \leq 0\}$$

Estos conjuntos están encajados y todos deben contener a F ,

$$\bar{B} = F_0 \supseteq F_1 \supseteq F_2 \supseteq \cdots \supseteq F_k \supseteq F_{k+1} \supseteq \cdots \supseteq F.$$

En términos de conjuntos, un corte C es simplemente un semiespacio definido por medio de un hiperplano H que “corta”,

$$\begin{aligned} H &= \{x \in \mathbb{R}^n : p^T x = \alpha\}, \\ C &= \{x \in \mathbb{R}^n : p^T x \leq \alpha\}. \end{aligned}$$

Si $x^{k+1} \in F_k$ no es factible ($g(x^{k+1}) > 0$), entonces el corte debe cumplir

$$\begin{aligned} x^{k+1} &\notin C \\ F &\subseteq C, \end{aligned}$$

así

$$\begin{aligned} F_{k+1} &= F_k \cap C \\ F_{k+1} &\supseteq F, \\ x^{k+1} &\notin F_{k+1} \end{aligned}$$

El corte definido por

$$\gamma(g, x^{k+1})^T x \leq \gamma(g, x^{k+1})^T x^{k+1} - g(x^{k+1})$$

cumple exactamente esas propiedades. Comprobemos (mientras no haya ambigüedad $\gamma = \gamma(g, x^{k+1})$). Un punto $y \in C$ si y solamente si $\gamma^T x^{k+1} - g(x^{k+1}) - \gamma^T y \geq 0$.

Veamos que $F \subseteq C$. Sea $x \in F$, entonces

$$g(x) \leq 0.$$

Como g es convexa,

$$g(x^{k+1}) + \gamma^T(x - x^{k+1}) \leq g(x)$$

luego

$$g(x^{k+1}) + \gamma^T(x - x^{k+1}) \leq 0.$$

Entonces

$$\gamma^T x \leq \gamma^T x^{k+1} - g(x^{k+1}),$$

es decir, $x \in C$. Veamos ahora que $x^{k+1} \notin C$.

$$\begin{aligned} \gamma^T x^{k+1} - g(x^{k+1}) - \gamma^T y &= \gamma^T x^{k+1} - g(x^{k+1}) - \gamma^T x^{k+1} \\ &= -g(x^{k+1}) < 0, \end{aligned}$$

H_{k+1}

puesto que x^{k+1} no es factible. Entonces $x^{k+1} \notin C$.

Figura 4.9.

En la figura 4.9, F_0 está determinado por $P_1P_2P_3P_4$, F_k por $P_1P_5P_6P_7P_4$, el corte es el semiespacio definido por el hiperplano H_{k+1} en la dirección de la flecha, el conjunto F_{k+1} estará definido por $P_1P_5P_6P_7P_8P_9$.

Los cortes pueden “tocar” el conjunto F o no tocarlo. La situación ideal se tiene cuando los cortes tocan a F y lo envuelven adecuadamente (no se concentran en una parte de la frontera de F). Esto requiere un manejo sofisticado y no siempre se logra completamente.

El esquema general del algoritmo para el método de planos de corte restringido es:

MÉTODO DE PLANOS DE CORTE RESTRINGIDO

```

datos:  $f, g, x^1 \in F, u, w, \underline{v}, \varepsilon, MAXIT$ ,
las restricciones iniciales son las de caja
 $v_1 \leftarrow -\infty$ 
para  $k = 1, \dots, MAXIT$ 
  con  $x^k$  el oráculo proporciona:  $\chi_F(x^k), h(x^k), \gamma(x^k)$ 
  si  $\chi_F(x^k) = 1$ 
     $\rho \leftarrow -1$ 
    si  $h(x^k) - v_k \leq \varepsilon$ , parar
  sino
     $\rho \leftarrow 0$ 
  fin-si
   $\alpha \leftarrow \gamma^T x^k - h(x^k)$ 
  agregar el corte  $\gamma^T x + \rho v \leq \alpha$ 
  obtener  $(x^{k+1}, v_{k+1})$  solución de (4.15)
fin-para

```

Ejemplo 4.11. Aplicar el método de planos de corte para minimizar

$$\min f(x) = \sum_{i=1}^3 \|x - a^i\|_2.$$

con la restricción

$$\max\{-12 + 3(x_1 + 4)^2 - x_2, 5 + 4(x_1 + 5)^2 + x_2\} \leq 0,$$

con los puntos

$$\begin{aligned} a^1 &= (-4, -3), \\ a^2 &= (-1, -2), \\ a^3 &= (-2, -8), \end{aligned}$$

y con los datos iniciales

$$\begin{aligned} x^1 &= (-4, -10), \\ u &= (-20, -20), \\ w &= (0, 0), \\ \underline{v} &= 1, \\ \varepsilon &= 10^{-6}. \end{aligned}$$

Se puede suponer que $g(x) = \max\{g_1(x), g_2(x)\}$. Una manera de construir un subgradiente es la siguiente:

$$\gamma(g, x) = \begin{cases} \gamma(g_1, x) & \text{si } g(x) = g_1(x), \\ \gamma(g_2, x) & \text{si } g(x) = g_2(x). \end{cases}$$

k	x_1^k	x_2^k	v_k	χ_F	$f(x^k)$	γ_1	γ_2	ρ	α
1	-4.0000	-10.0000	-100000	1	18.3724	-1.0582	-2.6434	-1	12.2948
2	0.0000	0.0000	1.0000	0	105.0000	40.0000	1.0000	0	-105.0000
3	-2.6250	0.0000	1.0000	0	27.5625	19.0000	1.0000	0	-77.4375
4	-4.0757	0.0000	1.0000	0	8.4176	7.3947	1.0000	0	-38.5561
5	-5.2140	0.0000	1.0000	0	5.1832	-1.7119	1.0000	0	3.7426
6	-4.6448	-4.2088	3.7462	0	1.2958	2.8414	1.0000	0	-18.7025
7	-4.9294	-4.6960	5.3351	0	0.3239	0.5648	1.0000	0	-7.8039
8	-5.0717	-4.9396	6.1296	0	0.0810	-0.5736	1.0000	0	-2.1117
9	-5.0005	-4.9798	6.1605	0	0.0202	-0.0044	1.0000	0	-4.9780
10	-4.9650	-4.9998	6.1760	0	0.0051	0.2802	1.0000	0	-6.3960
11	-4.9472	-5.0099	6.1837	0	0.0013	0.4225	1.0000	0	-7.1012
12	-4.9561	-5.0074	6.1866	0	0.0003	0.3513	1.0000	0	-6.7490
13	-4.9516	-5.0093	6.1868	0	0.0001	0.3869	1.0000	0	-6.9252
14	-4.9494	-5.0102	6.1870	0	0.0000	0.4047	1.0000	0	-7.0132
15	-4.9505	-5.0098	6.1870	0	0.0000	0.3958	1.0000	0	-6.9692
16	-4.9500	-5.0100	6.1870	0	0.0000	0.4002	1.0000	0	-6.9912
17	-4.9497	-5.0101	6.1870	1	11.3892	-1.9248	-0.7984	-1	2.1385
40	-4.7460	-5.2581	11.2228	0	0.0000	2.0321	1.0000	0	-14.9026
41	-4.7465	-5.2570	11.2228	0	0.0000	2.0277	1.0000	0	-14.8815
42	-4.7468	-5.2564	11.2228	1	11.2232	-1.7765	-0.8986	-1	1.9332
43	-4.7560	-5.2381	11.2231	0	0.0001	1.9521	1.0000	0	-14.5224
44	-4.7538	-5.2425	11.2231	0	0.0000	1.9699	1.0000	0	-14.6069
45	-4.7527	-5.2447	11.2231	0	0.0000	1.9788	1.0000	0	-14.6492
46	-4.7532	-5.2436	11.2231	0	0.0000	1.9743	1.0000	0	-14.6281
47	-4.7529	-5.2442	11.2231	1	11.2232	-1.7813	-0.8946	-1	1.9346
48	-4.7499	-5.2503	11.2231	0	0.0000	2.0011	1.0000	0	-14.7553
49	-4.7507	-5.2486	11.2231	0	0.0000	1.9944	1.0000	0	-14.7234
50	-4.7511	-5.2478	11.2231	1	11.2231	-1.7799	-0.8958	-1	1.9341

En programación lineal de gran tamaño, el método de descomposición de Dantzig-Wolfe es “método dual” del método de planos de corte.

4.3.3. Método de haces penalizados

El método de planos cortantes funciona muy bien en algunos problemas, en otros puede ser inestable, muy lento (ver ejemplo en [BoG97] p. 90) o

la sucesión $\{f(x^k)\}$ puede no ser una sucesión de descenso. Se dice que un método es de descenso si la sucesión $\{f(x^k)\}$ es de descenso, es decir,

$$f(x^{k+1}) < f(x^k) \quad \text{para todo } k.$$

El método de planos de corte para

$$\min f(x)$$

resuelve en la iteración k el problema relajado

$$\begin{aligned} \min \check{f}(x) \\ u \leq x \leq w. \end{aligned}$$

Introduciendo $v = \check{f}(x)$ el anterior problema se convierte en (4.10), problema de OL. El método de haces penalizados introduce una penalización en la función objetivo para evitar que haya demasiado movimiento entre x^k y x^{k+1}

$$\begin{aligned} \min \check{f}(x) + \frac{1}{2} \mu_k \|x - x^k\|_2^2 \\ u \leq x \leq w, \end{aligned}$$

que utiliza el parámetro $\mu_k > 0$. De nuevo introduciendo $v = \check{f}(x)$ el problema anterior se convierte en un problema de optimización cuadrática (función objetivo cuadrática con restricciones lineales)

$$\begin{aligned} \min_{x,v} \quad & 0^T x + v + \frac{1}{2} \mu_k \|x - x^k\|_2^2 \\ \text{s.t.} \quad & \gamma^{1^T} x - v \leq \gamma^{1^T} x^1 - f(x^1) \\ & \vdots \\ & \gamma^{k^T} x - v \leq \gamma^{k^T} x^k - f(x^k) \\ & (x, v) \in B. \end{aligned} \tag{4.18}$$

4.4. ACCPM

En el método de plano cortante el punto (x^{k+1}, v_{k+1}) se escoge como la solución del problema relajado

$$\min \xi_{n+1}$$

$$M\xi \leq c$$

donde $\xi = (x, v)$. La matriz M y el vector columna c se construyen a partir de las restricciones

$$\begin{aligned} x &\leq w, \\ -x &\leq -u, \\ v &\leq \bar{v}_0, \\ -v &\leq -\underline{v}_0, \\ \gamma(g, x^i)^T x &\leq \gamma(g, x^i)^T x^i - g(x^i), \quad i \in I_k, \\ \gamma(f, x^i)^T x - v &\leq \gamma(f, x^i)^T x^i - f(x^i), \quad i \in J_k. \end{aligned} \tag{4.19}$$

La única diferencia con lo visto anteriormente está dada por la restricción adicional $v \leq \bar{v}_0$ que establece una cota superior para v . El conjunto

$$\mathcal{L}_k = \mathcal{L} = \{\xi \in \mathbb{R}^{n+1} : M\xi \leq c\}$$

se llama el conjunto de localización. El subíndice k indica que el conjunto de localización depende de k y cambia en cada iteración (la matriz M y c también dependen de k). Se supone que en cualquier iteración, el punto $\xi^* = (x^*, v^*)$ está en \mathcal{L} . Así, el problema relajado que se resuelve en una iteración del método de planos cortantes es

$$\begin{aligned} \min \quad & \xi_{n+1} \\ \xi \in & \mathcal{L}. \end{aligned}$$

Hay otras maneras de escoger ξ^{k+1} . Una de ellas es el **método de los centros**. El punto ξ^{k+1} es simplemente el “centro” de \mathcal{L} . Hay varias definiciones de centro, una de ellas es el centro analítico. Usando este centro se obtiene el ACCPM, Analytic Center Cutting Plane Method, [GoHV92], un método eficiente de planos de corte para optimización convexa. Se puede utilizar en los dos casos, no diferenciable o diferenciable. Generalmente para problemas diferenciables hay métodos más eficientes.

4.4.1. Centro analítico

Sean $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $n > m$, $c \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, $Y = \{y \in \mathbb{R}^{m \times 1} : A^T y \leq c\}$ acotado y de interior no vacío. Se define el centro analítico de Y , definido

por A^T y c , y denotado por $\text{ca}(A^T, c)$, al único punto y solución del problema de optimización

$$\text{ca}(A^T, c) = \underset{y \in \overset{\circ}{Y}}{\operatorname{argmin}} \left(- \sum_{i=1}^n \log(c_i - A_i^T \cdot y) \right).$$

Como se supone que $\overset{\circ}{Y} = \{y \in \mathbb{R}^{m \times 1} : A^T y < c\} \neq \emptyset$, entonces $c_i - A_i^T \cdot y$ siempre es positivo y el logaritmo está bien definido. La función $P(y) = - \sum_{i=1}^n \log(c_i - A_i^T \cdot y)$ se llama la función potencial. No está definida para puntos en la frontera de Y (para algún i , $A_i^T \cdot y = c_i$). Cuando un punto interior está cerca de la frontera, entonces $c_i - A_i^T \cdot y$ es positivo pero cercano a cero y la función potencial tiene un valor grande. Como el centro analítico minimiza la función potencial, debe estar “lo más alejado posible” de la frontera.

Más adelante se verá que el centro analítico depende específicamente de A^T y de c pero no depende exactamente de Y . Es decir, puede haber dos definiciones que den lugar al mismo conjunto Y pero den lugar a dos centros analíticos diferentes.

Condiciones de optimalidad

Sea $s \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ el vector de variables de holgura, es decir,

$$A^T y + s = c.$$

En $\overset{\circ}{Y}$ se cumple $s > 0$. Sea $x \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ definido por

$$x_i = \frac{1}{s_i}.$$

Algunas veces, se denota simplemente $x = s^{-1}$. Como $s > 0$, entonces $x > 0$. Sea e el vector columna de unos de tamaño adecuado. En métodos de punto interior es usual la siguiente notación: si $x \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, X es una matriz diagonal cuyos elementos son los x_i ,

$$X = \begin{bmatrix} x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_n \end{bmatrix}$$

Así la definición de x se puede presentar como $x = S^{-1}e$, o también,

$$Xs = e.$$

Cálculo del gradiente de la función potencial:

$$\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial y_j}(y) &= -\sum_{i=1}^n \frac{1}{c_i - A_{i \cdot}^T y} (-1) A_{ij}^T \\ \frac{\partial P}{\partial y_j}(y) &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{s_i} A_{ij}^T \\ \frac{\partial P}{\partial y_j}(y) &= \sum_{i=1}^n x_i A_{ij}^T \\ \frac{\partial P}{\partial y_j}(y) &= \sum_{i=1}^n A_{ji} x_i \\ \frac{\partial P}{\partial y_j}(y) &= A_j \cdot x \\ P'(y) &= Ax.\end{aligned}$$

Como el centro analítico (minimizador) es un punto interior, entonces su gradiente debe ser nulo

$$Ax = 0.$$

Agrupando las condiciones de factibilidad y optimalidad, en las variables x , y y s , se tienen $m + n + n$ ecuaciones con $n + m + n$ incógnitas:

$$Ax = 0, \quad x > 0, \quad (4.20a)$$

$$A^T y + s - c = 0, \quad s > 0, \quad (4.20b)$$

$$Xs - e = 0. \quad (4.20c)$$

Se denotará con (x^a, y^a, s^a) a la tripla que cumpla estas condiciones. Realmente el centro analítico es y^a . Para saber si un punto \bar{y} es el centro analítico, se pueden seguir los siguientes pasos:

- calcular $s = c - A^T \bar{y}$,
- verificar que $s > 0$,
- calcular $x = S^{-1}e$,
- verificar que $Ax = 0$.

Supongamos ahora que se desea saber si a partir de un vector \bar{x} se puede obtener el centro analítico. Dicho de otra forma, ¿ $\bar{x} = x^a$? Se pueden seguir los siguientes pasos:

- verificar que $\bar{x} > 0$,
- verificar que $A\bar{x} = 0$,
- calcular $s = \bar{X}^{-1}e$,
- verificar que el sistema sobredeterminado $A^T y = c - s$ tiene solución.
- La solución del sistema es el centro analítico.

Las condiciones (4.20) se parecen mucho a las condiciones de factibilidad y optimalidad para el problema de OL $\min z = c^T x$ sujeto a $Ax = b$, $x \geq 0$,

$$\begin{aligned} Ax - b &= 0, \quad x \geq 0, \\ A^T y + s - c &= 0, \quad s \geq 0, \\ Xs &= 0. \end{aligned}$$

En OL las variables principales o primales son las variables x_j y las duales son las variables y_i . En la obtención del centro analítico sucede lo contrario. Sin embargo, para guardar semejanza con OL, las ecuaciones (4.20a) se llaman condiciones de factibilidad primal, las ecuaciones (4.20b) se llaman condiciones de factibilidad dual y las ecuaciones (4.20c) se llaman condiciones de complementariedad.

Ejemplo 4.12. Centro analítico del conjunto definido por las restricciones

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} y \leq \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

El conjunto Y es el triángulo con vértices $(0, 1)$, $(-2, 1)$ y $(-1, 3)$. Sea $\bar{y} = [-1 \ 5/3]^T$,

$$\begin{aligned} s &= c - A^T \bar{y}, \\ s &= [4/3 \ 4/3 \ 2/3]^T, \\ x &= S^{-1}e, \\ x &= [3/4 \ 3/4 \ 3/2]^T, \\ Ax &= [0 \ 0]^T. \end{aligned}$$

Luego $\bar{y} = [-1 \ 5/3]^T$ es el centro analítico. \diamond

Ejemplo 4.13. Centro analítico del conjunto definido por las restricciones

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} y \leq \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

De nuevo, el conjunto Y es el triángulo con vértices $(0, 1)$, $(-2, 1)$ y $(-1, 3)$.
Sea $\bar{y} = [-1 \ 3/2]^T$,

$$\begin{aligned} s &= c - A^T \bar{y}, \\ s &= [3/2 \ 3/2 \ 1/2 \ 3/2]^T, \\ x &= S^{-1} e, \\ x &= [2/3 \ 2/3 \ 2 \ 2/3]^T, \\ Ax &= [0 \ 0]^T. \end{aligned}$$

Luego $\bar{y} = [-1 \ 3/2]^T$ es el centro analítico. En estos dos ejemplos, el conjunto Y es el mismo, las restricciones son diferentes y los centros analíticos también. ◇

4.4.2. Métodos de punto interior

La mayoría de los métodos para calcular el centro analítico son métodos de punto interior. Estos están basados en el método de Newton en varias variables.

A continuación está el método de Newton y el esquema de una adaptación “general”. En otras subsecciones hay versiones sofisticadas de métodos de puntos interior.

Método de Newton

Cuando se tiene un sistema de p ecuaciones no lineales con p incógnitas, éste se puede escribir como la ecuación

$$\Phi(\zeta) = 0,$$

donde $\Phi : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$. La versión más sencilla del método de Newton empieza con una aproximación ζ^0 . En cada iteración se resuelve un sistema de ecuaciones lineales y se actualiza ζ :

$$\Phi'(\zeta^k) \Delta \zeta = -\Phi(\zeta^k),$$

$$\zeta^{k+1} = \zeta^k + \Delta\zeta.$$

En el sistema de ecuaciones lineales, la matriz $\Phi'(\zeta^k)$ es la matriz jacobiana, $-\Phi(\zeta^k)$ es el vector columna de términos independientes y $\Delta\zeta$, llamado frecuentemente la dirección, es el vector columna de incógnitas. En condiciones adecuadas el método converge y cerca a la solución tiene convergencia cuadrática, lo cual es muy bueno. El proceso se detiene cuando

$$\|\Phi(\zeta^k)\| \leq \varepsilon.$$

Método de Newton adaptado para puntos interiores

Consideremos ahora un sistema de ecuaciones donde además algunas de las variables deben ser positivas, por ejemplo $\bar{\zeta} = (\zeta_1, \dots, \zeta_q) > 0$, con $q < p$,

$$\begin{aligned}\Phi(\zeta) &= 0, \\ \bar{\zeta} &> 0,\end{aligned}$$

El esquema simplificado del método de Newton puede ser: empezar con ζ^0 una aproximación inicial tal que $\bar{\zeta}^0 > 0$, y en cada iteración:

$$\begin{aligned}\Phi'(\zeta^k) \Delta\zeta &= -\Phi(\zeta^k), \\ t_{\max} &= \max\{t : \bar{\zeta}^k + t \Delta\bar{\zeta} \geq 0\}, \\ \bar{t} &= \min\{0.99 t_{\max}, 1\}, \\ t_k &= \underset{0 \leq t \leq \bar{t}}{\operatorname{argmin}} \Phi(\zeta^k + t \Delta\zeta), \\ \zeta^{k+1} &= \zeta^k + t_k \Delta\zeta.\end{aligned}$$

El cálculo de \bar{t} sirve para dos cosas:

- con t_{\max} se tendría un punto tal que $\zeta^k + t_{\max} \Delta\zeta \geq 0$, pero que no es punto interior. Al tomar $0.99 t_{\max}$ se obtiene un punto interior.
- al hacer que $\bar{t} \leq 1$, se busca que el método sea muy semejante al método de Newton puro (en él, $t_k = 1$) y así buscar que la convergencia, cerca a la solución, sea cuadrática.

Notación

Es usual introducir vectores residuo (o resto) primal, dual y de complementariedad

$$\begin{aligned} r_p &= Ax, \\ r_d &= A^T y + s - c, \\ r_c &= Xs - e, \end{aligned} \tag{4.21}$$

y números asociados a ellos, que dan una medida relativa de su tamaño o norma

$$\begin{aligned} \rho_p &= \frac{\|r_p\|}{\max\{1, \|A\|, \|x\|\}} \\ \rho_d &= \frac{\|r_d\|}{\max\{1, \|A\|, \|c\|\}} \\ \rho_c &= \frac{\|r_c\|}{\max\{1, \|x\|, \|s\|\}} \end{aligned} \tag{4.22}$$

Cuando se tiene una tripla de vectores (x, y, s) , tales que $x > 0$ y $s > 0$, entonces y es el centro analítico y los tres residuos son nulos, es decir,

$$\rho_p = \rho_d = \rho_c = 0.$$

Lo anterior, en cálculos numéricos, casi nunca es posible. Para efectos prácticos, para tener el centro analítico, basta con que estos números sean suficientemente pequeños:

$$\rho_p \leq \varepsilon_p, \quad \rho_d \leq \varepsilon_d, \quad \rho_c \leq \varepsilon_c.$$

Las igualdades de las condiciones de factibilidad y optimalidad (4.20) se pueden considerar como una ecuación $\Phi(\zeta) = 0$, donde $\Phi : \mathbb{R}^{m+2n} \rightarrow \mathbb{R}^{m+2n}$. El valor de Φ se puede expresar con los residuos:

$$\Phi(x, y, s) = \begin{bmatrix} r_p \\ r_d \\ r_c \end{bmatrix}.$$

El jacobiano de Φ está dado por:

$$\Phi'(x, y, s) = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A^T & I_n \\ S & 0 & X \end{bmatrix}.$$

Las filas están agrupadas en bloques de m , n y n filas. Las columnas están agrupadas en bloques de n , m y n columnas.

4.4.3. Método de Newton primal factible

Este método, tomado de [Ye97], permite obtener el centro analítico partiendo de un punto interior primal x^0 “cercano” a x^a . De manera más precisa

$$\begin{aligned} x^0 &> 0, \\ Ax^0 &= 0, \\ \eta_p(x^0) &< 1, \end{aligned} \tag{4.23}$$

donde η_p indica “una distancia” de un punto a x^a ,

$$\eta_p(x)^2 = (Xc - e)^T (I_n - XA^T(AX^2A^T)^{-1}AX)(Xc - e).$$

Si $x > 0$, $Ax = 0$, y $\eta_p(x) = 0$, entonces $x = x^a$.

Premultiplicando por X^{-1} la tercera igualdad de las condiciones de factibilidad y optimalidad (4.20) se obtiene

$$\begin{aligned} Ax &= 0, \\ A^T y + s - c &= 0, \\ s - X^{-1}e &= 0. \end{aligned}$$

Al aplicar el método de Newton se tiene

$$\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A^T & I \\ X^{-2} & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta s \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} Ax \\ A^T y + s - c \\ s - X^{-1}e \end{bmatrix}$$

Como x es factible primal, entonces $Ax = 0$. Además, para cualquier y se puede calcular s para que $A^T y + s - c = 0$.

$$\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A^T & I \\ X^{-2} & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ X^{-1}e - s \end{bmatrix} \tag{4.24}$$

Es decir,

$$A \Delta x = 0, \tag{4.25}$$

$$A^T \Delta y + \Delta s = 0, \tag{4.26}$$

$$X^{-2} \Delta x + \Delta s = X^{-1}e - s. \tag{4.27}$$

Multiplicando la tercera igualdad por AX^2 ,

$$\begin{aligned} AX^2X^{-2}\Delta x + AX^2\Delta s &= AX^2X^{-1}e - AX^2s, \\ A\Delta x + AX^2\Delta s &= AXe - AX^2s. \end{aligned}$$

Como $A\Delta x = 0$

$$\begin{aligned} AX^2\Delta s &= AXe - AX^2s \\ AX^2\Delta s &= AX(e - Xs) \end{aligned}$$

A partir de (4.26)

$$\begin{aligned} A^T\Delta y &= -\Delta s \\ AX^2A^T\Delta y &= -AX^2\Delta s \\ AX^2A^T\Delta y &= AX(Xs - e) \\ \Delta y &= (AX^2A^T)^{-1}AX(Xs - e) \end{aligned}$$

De nuevo, a partir de (4.26)

$$\begin{aligned} \Delta s &= -A^T\Delta y \\ \Delta s &= -A^T(AX^2A^T)^{-1}AX(Xs - e) \end{aligned}$$

A partir de (4.27)

$$\begin{aligned} X^{-2}\Delta x &= -\Delta s + X^{-1}e - s, \\ \Delta x &= -X^2\Delta s + X^2X^{-1}e - X^2s, \\ \Delta x &= -X(X\Delta s - e + Xs), \\ \Delta x &= -X\left(-XA^T(AX^2A^T)^{-1}AX(Xs - e) - e + Xs\right), \\ \Delta x &= -X\left(-XA^T(AX^2A^T)^{-1}AX + I\right)(Xs - e), \\ \Delta x &= -X\left(-XA^T(AX^2A^T)^{-1}AX + I\right)\left(X(c - A^Ty) - e\right), \\ \Delta x &= -X\left(I - XA^T(AX^2A^T)^{-1}AX\right)\left(Xc - e - XA^Ty\right), \\ \Delta x &= -X\left(I - XA^T(AX^2A^T)^{-1}AX\right)\left(Xc - e\right) \\ &\quad + X\left(I - XA^T(AX^2A^T)^{-1}AX\right)XA^Ty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta x &= -X \left(I - X A^T (A X^2 A^T)^{-1} A X \right) \left(X c - e \right) \\ &\quad + X \left(X A^T - X A^T (A X^2 A^T)^{-1} A X X A^T \right) y \\ \Delta x &= -X \left(I - X A^T (A X^2 A^T)^{-1} A X \right) \left(X c - e \right) \\ &\quad + X \left(X A^T - X A^T \right) y\end{aligned}$$

Entonces

$$\Delta x = -X \left(I - X A^T (A X^2 A^T)^{-1} A X \right) \left(X c - e \right)$$

Si se define

$$p = \left(I - X A^T (A X^2 A^T)^{-1} A X \right) \left(X c - e \right) \quad (4.28)$$

entonces

$$\Delta x = -X p \quad (4.29)$$

y se puede mostrar que

$$\eta_p(x) = \|p\| \quad (4.30)$$

La expresión para calcular Δx no utiliza ni y ni s .

MÉTODO DE NEWTON PRIMAL FACTIBLE

datos: A^T , c , x^0 que cumpla (4.23), ε , $MAXIT$
para $k = 0, \dots, MAXIT$
 calcular p según (4.28) o (4.31)
 $\eta \leftarrow \|p\|$
 si $\eta \leq \varepsilon$ **parar**
 $\Delta x \leftarrow -X p$
 $x^{k+1} \leftarrow x^k + \Delta x$
fin-para

Con el x obtenido se calcula $s = X^{-1}e$ y se resuelve el sistema sobredeterminado $A^T y = c - s$. Este sistema debe tener solución en el sentido estricto, no se trata de seudosolución o solución por mínimos cuadrados. Sin embargo, una de las maneras de resolverlo es por mínimos cuadrados, en particular usando la ecuación normal

$$(A A^T) y = A(s - c).$$

Si las primeras m filas de A^T son independientes, también se puede resolver el sistema cuadrado

$$A^T(1:m,:) y = s(1:m,1) - c(1:m,1).$$

Se puede mostrar que

$$\eta_p(x^{k+1}) \leq (\eta_p(x^k))^2$$

lo cual garantiza la convergencia cuadrática.

El algoritmo es muy sencillo, pero su eficiencia depende en un porcentaje importantísimo de una buena implementación de (4.28) para el cálculo de p . Algunas consideraciones útiles son las siguientes:

- El cálculo de p se puede descomponer en los siguientes pasos:

$$\begin{aligned} \pi &= Xc - e, \\ \tilde{A} &= AX, \\ \text{resolver } (\tilde{A}\tilde{A}^T)\sigma &= \tilde{A}\pi, \\ p &= \pi - \tilde{A}^T\sigma. \end{aligned} \tag{4.31}$$

- Casi nunca es necesario calcular explícitamente una inversa. Por eso en lugar de tomar directamente de (4.28), $\sigma = (\tilde{A}\tilde{A}^T)^{-1}\tilde{A}\pi$, es mejor resolver el sistema $(\tilde{A}\tilde{A}^T)\sigma = \tilde{A}\pi$.
- En la solución del sistema de ecuaciones se debería tener en cuenta que la matriz $\tilde{A}\tilde{A}^T$ es definida positiva (si las columnas de A^T son independientes) y utilizar el método de Cholesky.
- No es necesario construir explícitamente la matriz diagonal X , basta con saber lo que pasa al multiplicar por X .

Ejemplo 4.14. Hallar el centro analítico del conjunto definido por las restricciones

$$\begin{bmatrix} -10 & -1 & 0 \\ -2 & -10 & 0 \\ -1 & -2 & -10 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} y \leq \begin{bmatrix} -20 \\ -30 \\ -40 \\ 50 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

partiendo de $x^0 = [0.8089796 \ 0.7951020 \ 1.12 \ 0.2 \ 10.]^T$.

Se puede verificar que $Ax^0 = 0$, $x^0 > 0$, y $\eta_p(x^0) = 0.8362$, entonces se puede aplicar el método.

k	x_1^k	x_2^k	x_3^k	x_4^k	x_5^k	η
	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	
0	0.8090	0.7951	1.1200	0.2000	10.0000	
	-0.1509	-0.1289	-0.1107	0.7749	-0.2170	0.836182
1	0.9311	0.8976	1.2440	0.0450	12.1699	
	-0.0248	-0.0275	-0.0298	-0.5999	-0.0172	0.601986
2	0.9542	0.9223	1.2811	0.0720	12.3792	
	-0.0007	-0.0033	-0.0056	-0.3596	0.0068	0.359723
3	0.9548	0.9254	1.2883	0.0979	12.2952	
	-0.0001	-0.0014	-0.0024	-0.1291	0.0036	0.129231
4	0.9549	0.9266	1.2914	0.1106	12.2509	
	-0.0000	-0.0002	-0.0004	-0.0167	0.0005	0.016666
5	0.9549	0.9268	1.2919	0.1124	12.2445	
	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0003	0.0000	0.000277
6	0.9549	0.9268	1.2919	0.1124	12.2444	
	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000	0.000000

Entonces $s = [1.047267 \ 1.078990 \ 0.774051 \ 8.892908 \ 0.081670]^T$. Es necesario resolver

$$\begin{bmatrix} -10 & -1 & 0 \\ -2 & -10 & 0 \\ -1 & -2 & -10 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} -21.047267 \\ -31.078990 \\ -40.774051 \\ 41.107092 \\ 7.918330 \end{bmatrix}.$$

$$y^a = [1.8305478 \ 2.7417895 \ 3.3459924]. \quad \diamond$$

4.4.4. Algoritmo potencial afín

Dado un punto inicial tal que

$$\begin{aligned} Ax^0 &= 0, \\ x^0 &> 0, \end{aligned} \tag{4.32}$$

se obtiene un punto x tal que

$$\begin{aligned} Ax &= 0, \\ x &> 0, \end{aligned} \tag{4.33}$$

$$\eta_p(x) < 1,$$

es decir, un punto que sirva como punto inicial para el método de Newton primal factible.

Una de las formas de obtener un punto que cumpla (4.32) consiste en resolver el siguiente problema de OL:

$$\begin{aligned} \min \quad & z = 0^T x \\ & Ax = 0, \\ & x \geq \delta e. \end{aligned}$$

Una vez obtenido un punto que cumpla (4.32), antes de empezar las iteraciones, es necesario modificar x^0 para que

$$c^T x^0 = n.$$

El paso importante en cada iteración corresponde al cálculo de p según (4.28). Dado un valor $\alpha \in]0, 1[$, el esquema del algoritmo es el siguiente:

ALGORITMO POTENCIAL AFÍN

datos: A^T, c, x^0 que cumpla (4.32), $\alpha, MAXIT$
 $x^0 \leftarrow \frac{n}{c^T x^0} x^0$
para $k = 0, \dots, MAXIT$
 calcular p según (4.28) o (4.31)
 $\eta \leftarrow \|p\|$
 si $\eta < 1$ **parar**
 $\Delta x \leftarrow -\frac{\alpha}{\eta} X p$
 $x^{k+1} \leftarrow x^k + \Delta x$
fin-para

Una manera, no muy eficiente, para encontrar un punto que cumpla (4.32) consiste en resolver el siguiente problema de OL:

$$\begin{aligned} \min \quad & z = 0^T x \\ & Ax = 0 \\ & x_i \geq \varepsilon \quad \forall i. \end{aligned}$$

Ejemplo 4.15. Encontrar un punto que cumpla (4.33) en el problema de centro analítico del conjunto definido por las restricciones

$$\begin{bmatrix} -10 & -1 & 0 \\ -2 & -10 & 0 \\ -1 & -2 & -10 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} y \leq \begin{bmatrix} -20 \\ -30 \\ -40 \\ 50 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

partiendo de $x^0 = [0.1 \ 0.1054 \ 0.1568 \ 0.1 \ 0.9676]^T$, con $\alpha = 0.9$.

Se puede verificar que $Ax^0 = 0$, $x^0 > 0$, entonces se puede aplicar el método.

k	x_1^k	x_2^k	x_3^k	x_4^k	x_5^k	η
	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	
0	0.3822	0.4029	0.5992	0.3822	3.6983	
	-0.4357	-0.2126	-0.0499	2.0507	-1.3525	2.504421
1	0.4421	0.4337	0.6099	0.1005	5.4959	
	-0.5364	-0.5269	-0.5191	-0.1072	-0.5644	1.079284
2	0.6398	0.6242	0.8740	0.1095	8.0824	
	-0.3298	-0.3247	-0.3205	-0.0263	-0.3445	0.660519

4.4.5. Método primal-dual factible

Es posiblemente el método más popular para obtener el centro analítico, debido a su gran eficiencia. Permite obtener la tripla (x^a, y^a, s^a) (una muy buena aproximación de), partiendo de x^0 y y^0 tales que

$$\begin{aligned} Ax^0 &= 0, \\ x^0 &> 0, \\ s^0 = s(y^0) &= c - A^T y^0 > 0, \\ \eta_c(x^0, s^0) &< 1, \end{aligned} \tag{4.34}$$

donde

$$\eta_c(x, s) = \|r_c\| = \|Xs - e\|.$$

es decir, la tripla (x^0, y^0, s^0) cumple con la factibilidad primal y la dual. Se desea obtener, iterativamente, un punto que siga cumpliendo factibilidad

primal y dual, pero que también cumpla con las condiciones de complementariedad, es decir, se busca que $\eta_c(x, s) = 0$.

El sistema $\Phi'(\zeta)\Delta\zeta = -\Phi(\zeta)$ que debe ser resuelto en cada iteración del método de Newton para la solución del sistema de ecuaciones (4.20) es

$$\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A^T & I_n \\ S & 0 & X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r_p \\ -r_d \\ -r_c \end{bmatrix}.$$

Como se supone que se cumple la factibilidad primal y la dual,

$$\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A^T & I_n \\ S & 0 & X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -r_c \end{bmatrix}. \quad (4.35)$$

Aunque se puede resolver directamente el sistema anterior de ecuaciones lineales de tamaño $(2n + m) \times (2n + m)$, es más eficiente, en tiempo y en precisión, realizar despejes semejantes a los del método de Newton primal factible hasta obtener

$$Q = AXS^{-1}A^T \quad (4.36a)$$

$$\Delta x = -S^{-1}(r_c - XA^TQ^{-1}AS^{-1}r_c) \quad (4.36b)$$

$$\Delta y = -Q^{-1}AS^{-1}e \quad (4.36c)$$

$$\Delta s = -A^T\Delta y. \quad (4.36d)$$

Obsérvese que, como aparece en algunos libros, también se puede escribir $Q = AS^{-1}XA^T$ ya que las matrices X y S^{-1} son diagonales.

Una consideración adicional relativa a la eficiencia es la siguiente:

- Para calcular Δy es necesario resolver un sistema de ecuaciones con matriz Q . Uno de los pasos para calcular Δx consiste en resolver el sistema de ecuaciones $Q\tau = AS^{-1}r_c$. Luego la primera factorización de Cholesky de Q sirve para el segundo sistema.

MÉTODO PRIMAL-DUAL FACTIBLE

datos: A^T , c , x^0 y y^0 que cumplan (4.34), ε , $MAXIT$
para $k = 0, \dots, MAXIT$

```

 $r_c \leftarrow Xs - e$ 
 $\eta \leftarrow \|r_c\|$ 
si  $\eta \leq \varepsilon$  parar
    calcular  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta s$  según (4.36)
     $x^{k+1} \leftarrow x^k + \Delta x$ 
     $y^{k+1} \leftarrow y^k + \Delta y$ 
     $s^{k+1} \leftarrow s^k + \Delta s$ 
fin-parar

```

En este método no es indispensable calcular en cada iteración y^{k+1} . Simplemente muestra el proceso del cálculo del centro analítico. Si no se hace, una vez que $\eta = \eta_c(x, s) \leq \varepsilon$, es necesario resolver $A^T y = c - s$.

Se puede mostrar que *si $\eta_c(x^0, s^0) < 2/3$, entonces la convergencia es cuadrática.*

Ejemplo 4.16. Calcular el centro analítico del conjunto definido por las restricciones

$$\begin{bmatrix} -10 & -1 & 0 \\ -2 & -10 & 0 \\ -1 & -2 & -10 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} y \leq \begin{bmatrix} -20 \\ -30 \\ -40 \\ 50 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

partiendo de $x^0 = [0.8575510 \ 0.8322449 \ 1.16 \ 0.1 \ 11]^T$ y $y^0 = [1.8 \ 2.8 \ 3.3]^T$.

Para los puntos iniciales, $x^0 > 0$, $Ax^0 = 0$, $s^0 = [0.8 \ 1.6 \ 0.4 \ 9. \ 0.1]^T > 0$, $r_c = [-0.3139592 \ 0.3315918 \ -0.536 \ -0.1 \ 0.1]^T$, $\eta = 0.7182$, es decir, se cumple (4.34).

k	x_1^k s_1^k	x_2^k s_2^k	x_3^k s_3^k	x_4^k s_4^k	x_5^k s_5^k	y_1^k η	y_2^k	y_3^k
	Δx_1	Δx_2	Δx_3	Δx_4	Δx_5	Δy_1	Δy_2	Δy_3
	Δs_1	Δs_2	Δs_3	Δs_4	Δs_5			
0	0.8576 0.8000 0.0973 0.2753	0.8322 1.6000 0.0946 -0.5802	1.1600 0.4000 0.1319 0.4166	0.1000 9.0000 0.0124 -0.1192	11.0000 0.1000 1.2448 -0.0204	1.8000 0.7182 0.0340 -0.0648	2.8000 0.0512 -0.0648 0.0512	3.3000
1	0.9549 1.0753 -0.0000 -0.0280	0.9268 1.0198 -0.0000 0.0592	1.2919 0.8166 -0.0000 -0.0425	0.1124 8.8808 0.0000 0.0122	12.2448 0.0796 -0.0004 0.0021	1.8340 0.0860 -0.0035 0.0066	2.7352 -0.0052 0.0066 -0.0052	3.3512
2	0.9549 1.0473	0.9268 1.0790	1.2919 0.7741	0.1124 8.8929	12.2444 0.0817	1.8305 0.0000	2.7418 0.0000	3.3460

4.4.6. Algoritmo potencial primal-dual

Dados dos puntos x^0, y^0 tales que

$$\begin{aligned} Ax^0 &= 0, \\ x^0 &> 0, \\ s^0 = s(y^0) &= c - A^T y^0 > 0, \end{aligned} \tag{4.37}$$

se obtienen dos puntos x, y tales que

$$\begin{aligned} Ax &= 0, \\ x &> 0, \\ s = s(y) &= c - A^T y > 0, \\ \eta_c(x, s) &< 1. \end{aligned} \tag{4.38}$$

es decir, una pareja de puntos que sirvan para empezar el método primal-dual factible.

Una de las formas de obtener los puntos que cumplen (4.37) consiste en resolver dos problemas de OL:

$$\begin{aligned} \min \quad z &= 0^T x \\ Ax &= 0, \\ x &\geq \delta_1 e. \end{aligned}$$

$$\min \quad z = 0^T y$$

$$A^T y \leq c - \delta_2 e.$$

Una vez obtenida la pareja que cumpla (4.37), antes de empezar las iteraciones, es necesario modificar x^0 para que

$$s^{0T} x^0 = n.$$

En cada iteración las direcciones Δx , Δy y Δs se calculan como en el método primal-dual (4.36), pero en lugar de efectuar un paso de Newton puro, $x^{k+1} = x^k + \Delta x$, se controla el paso,

$$x^{k+1} = x^k + \theta \Delta x,$$

donde

$$\theta = \frac{\alpha \sqrt{\min(Xs)}}{\|(XS)^{-1/2}(Xs - e)\|}, \quad (4.39)$$

y $\alpha \in]0, 1[$. Si u es un vector, $\min u = \min\{u_1, u_2, \dots\}$. Si D es una matriz diagonal positiva, $D^{-1/2} = \sqrt{D^{-1}}$. El uso de θ sirve para garantizar que $x^{k+1} > 0$ y $s^{k+1} > 0$.

ALGORITMO POTENCIAL PRIMAL-DUAL

datos: A^T , c , x^0 y y^0 que cumplan (4.37), $MAXIT$
 $s^0 \leftarrow c - A^T y^0$
 $x^0 \leftarrow \frac{n}{x^{0T} s^0} x^0$
para $k = 0, \dots, MAXIT$
 $r_c \leftarrow Xs - e$
 $\eta \leftarrow \|r_c\|$
 si $\eta < 1$ **parar**
 calcular θ según (4.39)
 calcular Δx , Δy , Δs según (4.36)
 $x^{k+1} \leftarrow x^k + \theta \Delta x$
 $y^{k+1} \leftarrow y^k + \theta \Delta y$
 $s^{k+1} \leftarrow s^k + \theta \Delta s$
fin-para

Ejemplo 4.17. Encontrar x, y que cumplan (4.34) en el problema de centro analítico del conjunto definido por las restricciones

$$\begin{bmatrix} -10 & -1 & 0 \\ -2 & -10 & 0 \\ -1 & -2 & -10 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} y \leq \begin{bmatrix} -20 \\ -30 \\ -40 \\ 50 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

partiendo de $x^0 = [0.1 \ 0.1054054 \ 0.1567568 \ 0.1 \ 0.9675676]^T$ y $y^0 = [1.7530612 \ 2.6693878 \ 3.3108163]^T$.

Para los puntos iniciales,

$$\begin{aligned} x^0 &> 0 \\ Ax^0 &= 0 \\ s^0 &= \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.2 \\ 0.2 \\ 9.7759184 \\ 0.2667347 \end{bmatrix} > 0, \end{aligned}$$

es decir, se cumple (4.37). Los resultados están en la tabla 4.1 al final del capítulo.

4.4.7. Restricción adicional en el método primal

El cálculo del centro analítico se va a usar en el ACCPM, una modificación del método de planos cortantes, en el cual se van agregando restricciones, es decir, en una iteración es necesario calcular el centro analítico de

$$A^T y \leq c \tag{4.40}$$

y en la siguiente se debe calcular el centro analítico de

$$\hat{A}^T y \leq \hat{c} \tag{4.41}$$

donde hay una restricción adicional, es decir,

$$\hat{A}^T = \begin{bmatrix} A^T \\ \omega^T \end{bmatrix}, \quad \hat{c} = \begin{bmatrix} c \\ \alpha \end{bmatrix}.$$

Al calcular el centro analítico de (4.40) se obtiene $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$, aproximación de x^a , que, en particular, cumple

$$\begin{aligned} A\tilde{x} &= 0, \\ \tilde{x} &> 0. \end{aligned} \tag{4.42}$$

Para empezar el método primal para (4.41) se requiere un $\hat{x} = (x, x_\omega) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tal que

$$\begin{aligned} \hat{A}\hat{x} &= 0, \\ \hat{x} &> 0, \end{aligned} \tag{4.43}$$

es decir,

$$\begin{aligned} Ax + x_\omega \omega &= 0, \\ x &> 0, \\ x_\omega &> 0. \end{aligned}$$

Se sabe que se puede obtener un \hat{x} que cumpla las dos condiciones (4.43) resolviendo un problema de OL, pero, ¿habrá otra forma? Así, la pregunta natural es: ¿cómo obtener \hat{x} , a partir de \tilde{x} ? Una de las maneras de hacerlo es la siguiente.

Si \hat{x} cumple (4.43) y $\beta > 0$, entonces $\beta\hat{x}$ también cumple (4.43). Entonces, dado $\delta > 0$, las condiciones (4.43) se pueden remplazar por condiciones de factibilidad en OL,

$$\begin{aligned} \hat{A}\hat{x} &= 0, \\ x_\omega &= \delta, \\ \hat{x} &\geq 0. \end{aligned}$$

Usando la fórmula de Sherman-Morrison-Woodbury (ver [GoVa96], p. 50),

$$(C + UV^T)^{-1} = C^{-1} - C^{-1}U(I + V^T C^{-1}U)^{-1}V^T C^{-1}$$

en [DuM95] están los cálculos para llegar a

$$d = (A\tilde{X}^2 A^T)^{-1} \omega \tag{4.44a}$$

$$\sigma = \omega^T d \tag{4.44b}$$

$$\delta = \frac{\delta_0}{1 + \sigma \delta_0^2} \tag{4.44c}$$

$$\Delta x = -\delta \tilde{X}^2 A^T d \quad (4.44d)$$

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} \tilde{x} + \Delta x \\ \delta \end{bmatrix} \quad (4.44e)$$

con $\delta_0 > 0$ suficientemente pequeño.

Ejemplo 4.18. Para las restricciones

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} y \leq \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix},$$

el centro analítico es $y^a = (-1, 5/3)$ y $x^a = (3/4, 3/4, 3/2)$. Dado $\tilde{x} = (1.2, 1.2, 2.4)$, que cumple (4.42), encontrar \hat{x} , un punto inicial primal, es decir, que cumpla (4.43), para las restricciones

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} y \leq \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

$$d = [0.2604167 \ 0.4629630]^T$$

$$\sigma = 2.6331019,$$

$$\delta_0 = 0.1,$$

$$\delta = 0.0974345,$$

$$\Delta x = [-0.1380321 \ 0.0081195 \ 0.2598252]^T$$

$$\hat{x} = [1.0619679 \ 1.2081195 \ 2.6598252 \ 0.0974345]^T.$$

Este punto cumple (4.43). \diamond

4.4.8. Algoritmo ACCPM

La versión de ACCPM presentada aquí es una versión simplificada. Una versión muy eficiente está en la tesis doctoral [DuM95]. Bastante información se puede encontrar en la página del laboratorio Logilab de la Universidad de Ginebra:

<http://blogs.unige.ch/hec/logilab/templeet.php/rapport.fr.html>

Para evitar confusiones se utilizará el vector $y \in \mathbb{R}^m$ como variable del problema de optimización. ACCPM se utiliza para el problema convexo (4.11):

$$\begin{aligned} \min \quad & f(y) \\ \text{subject to} \quad & g(y) \leq 0. \end{aligned}$$

Además de f y g (o del oráculo), los datos inciales son: u , w , \bar{v}_0 , \underline{v}_0 . No se requiere un punto inicial.

Para las $2m + 2$ restricciones de caja, el centro analítico es

$$\begin{aligned} y_i &= \frac{u_i + w_i}{2}, \\ v &= \frac{\underline{v}_0 + \bar{v}_0}{2}. \end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned} s_i &= s_{i+m} = \frac{w_i - u_i}{2}, \quad i = 1, \dots, m, \\ s_{2m+1} &= s_{2m+2} = \frac{\bar{v}_0 - \underline{v}_0}{2}, \\ x_j &= 1/s_j, \quad j = 1, \dots, 2m + 1. \end{aligned}$$

De manera análoga al método simplex en OL, hay dos fases, fase I y fase II. La fase II empieza cuando se obtiene el primer y factible y el primer corte de optimalidad.

En la fase I, todos los cortes son de factibilidad. Sirven para ir aproximando, cada vez mejor, el conjunto factible. Cuando se trata de un problema no restringido, todos los puntos son factibles, no hay fase I, se empieza directamente con la fase II.

Los cortes en la fase II pueden ser de factibilidad o de optimalidad. Cuando el punto y^k es factible, corte de optimalidad, se utilizan los valores \bar{v} y \underline{v} , cotas superior e inferior actualizadas para v , es decir, para $f(y)$.

$$\bar{v} = \min\{f(y^i) : i \in J_k\}. \quad (4.45)$$

La manera de obtener el valor \underline{v} o una aproximación es un poco más compleja. En realidad hay varias formas, unas mejores que otras, unas más fáciles que otras. Los cálculos están en [DuM95].

El proceso iterativo ACCPM acaba, en la fase II, cuando para un punto factible, $\bar{v} - \underline{v}$, el salto o brecha (“gap”) de dualidad, es suficientemente pequeño. De manera relativa,

$$\frac{\bar{v} - \underline{v}}{\max\{1, |\bar{v}|\}} \leq \varepsilon. \quad (4.46)$$

En esta versión simplificada de ACPPM se utilizará un criterio de parada menos preciso. El proceso iterativo se detiene cuando dos vectores factibles consecutivos son casi iguales o cuando el valor f en ellos es casi el mismo. Sea y^k un punto factible y y' el anterior punto factible.

$$\frac{\|y^k - y'\|}{\max\{1, \|y^k\|\}} \leq \varepsilon_y. \quad (4.47)$$

$$\frac{|f(y^k) - f(y')|}{\max\{1, |f(y^k)|\}} \leq \varepsilon_f. \quad (4.48)$$

Cuando se obtiene el primer punto factible, la restricción $v \leq \bar{v}_0$ se remplaza por $v \leq \bar{v}$. Con los otros puntos factibles, la restricción se actualiza al nuevo valor de \bar{v} .

También, con el primer punto factible, la restricción $-v \leq -\underline{v}_0$ se puede suprimir. En la fase I se necesitaba para asegurar que el conjunto definido por las restricciones de caja fuera acotado y así garantizar la existencia del centro analítico.

Algunos refinamientos son convenientes o algunas veces indispensables. Según lo visto hasta ahora, en cada punto y^k se calcula únicamente un subgradiente. Si $g(y^k) > 0$, se pueden calcular varios subgradientes de g y se introducen varios cortes de factibilidad. Por ejemplo, cuando $g(y) = \max\{g_1(y), \dots, g_p(y)\}$, se puede pensar en tomar un corte de factibilidad cada vez que $g_i(y^k) > 0$.

A medida que aumentan las iteraciones, el número de cortes (el número de filas de la matriz) puede volverse inmanejable. Se hace indispensable quitar restricciones innecesarias mediante el uso de elipsoides: un plano que no corta el elipsoide es superfluo y se puede eliminar.

ACCPM

```

datos:  $f, g, u, w, \underline{v}_0, \bar{v}_0, MAXIT$ 
construir  $M$  y  $c$  con restricciones de caja
 $y^0 \leftarrow (u + w)/2$ 
 $\bar{v} \leftarrow \bar{v}_0$ 
para  $k = 0, \dots, MAXIT$ 
    con  $y^k$  el oráculo proporciona:  $\chi_F(y^k), h(y^k), \gamma(y^k)$ 
    si  $\chi_F(y^k) = 1$ 
        si  $h(y^k) < \bar{v}$ 
             $\bar{v} \leftarrow h(y^k)$ 
             $c_{2n+1} \leftarrow \bar{v}$ 
        fin-si
        si (4.46) o (4.47) o (4.48) parar
             $\rho \leftarrow -1$ 
        sino
             $\rho \leftarrow 0$ 
        fin-si
         $\alpha \leftarrow \gamma^T y^k - h(y^k)$ 
        agregar el corte  $\gamma^T y + \rho v \leq \alpha$ 
        obtener  $(y^{k+1}, v_{k+1})$  centro analítico de  $My \leq c$ 
    fin-para

```

Ejemplo 4.19. Aplicar ACCPM para minimizar

$$\min f(x) = \sum_{i=1}^3 \|x - a^i\|_2.$$

con la restricción

$$\max\{-12 + 3(x_1 + 4)^2 - x_2, 5 + 4(x_1 + 5)^2 + x_2\} \leq 0,$$

con los puntos

$$\begin{aligned} a^1 &= (-4, -3), \\ a^2 &= (-1, -2), \\ a^3 &= (-2, -8), \end{aligned}$$

y con los datos iniciales

$$u = (-13, -20),$$

$$w = (-3, -5),$$

$$\underline{v}_0 = 0,$$

$$\bar{v}_0 = 20.$$

k	y_1^k	y_2^k	v_k	χ_F	$h(y^k)$	γ_1	γ_2	ρ	α
0	-8.0000	-12.5000	10.0000	0	48.5000	-24.0000	-1.0000	0	156.0000
1	-4.3742	-11.7900	10.0000	0	0.2095	-2.2451	-1.0000	0	21.4000
2	-3.9420	-8.0697	11.0000	0	1.4077	8.4640	1.0000	0	-42.8430
3	-4.9200	-7.8064	11.0000	1	14.8260	-1.7454	-1.7448	-1	7.3821
4	-4.9027	-5.8825	13.1320	1	12.1190	-1.8157	-1.0702	-1	3.0788
5	-4.6387	-5.3797	11.6890	0	0.1426	2.8908	1.0000	0	-18.9320
6	-4.8796	-5.3669	11.8540	1	11.5640	-1.8416	-0.9180	-1	2.3490
7	-4.8081	-5.2057	11.4670	1	11.2880	-1.8179	-0.8776	-1	2.0207
8	-4.8054	-5.0911	11.2570	0	0.0603	1.5564	1.0000	0	-12.6310
9	-4.7406	-5.2813	11.2720	1	11.2350	-1.7704	-0.9063	-1	1.9449
10	-4.7294	-5.2792	11.2290	0	0.0136	2.1647	1.0000	0	-15.5300
11	-4.7594	-5.2329	11.2320	1	11.2250	-1.7863	-0.8907	-1	1.9380
12	-4.7636	-5.2203	11.2240	0	0.0032	1.8912	1.0000	0	-14.2320
13	-4.7480	-5.2540	11.2240	0	5.E-05	2.0162	1.0000	0	-14.8270
14	-4.7509	-5.2489	11.2240	1	11.2240	-1.7797	-0.8961	-1	1.9347
15	-4.7527	-5.2447	11.2240	1	11.2230	-1.7811	-0.8947	-1	1.9347
16	-4.7545	-5.2411	11.2230	0	0.0001	1.9644	1.0000	0	-14.5810
17	-4.7510	-5.2479	11.2230	1	11.2230	-1.7799	-0.8958	-1	1.9341

Ejercicios

- 4.1** Sea C un convexo, $g_1, g_2 : C \rightarrow \mathbb{R}$ funciones convexas, $\alpha > 0$, $f = g_1 + g_2$, $\bar{x} \in C$, γ^1 subgradiente de g_1 en \bar{x} , γ^2 subgradiente de g_2 en \bar{x} . Muestre que $\gamma^1 + \gamma^2$ es subgradiente de f en \bar{x} y $\alpha\gamma^1$ es subgradiente de h en \bar{x} .
- 4.2** Sea C un convexo, $g_1, g_2, g_3 : C \rightarrow \mathbb{R}$ funciones convexas, $g(x) = \max\{g_1(x), g_2(x), g_3(x)\}$, $\bar{x} \in C$, $g_2(\bar{x}), g_3(\bar{x}) < g_1(\bar{x}) = g(\bar{x})$. Muestre que γ^1 es un subgradiente de g en \bar{x} .
- 4.3** Sea C un convexo, $g_1, g_2, g_3 : C \rightarrow \mathbb{R}$ funciones convexas, $g(x) = \max\{g_1(x), g_2(x), g_3(x)\}$, $\bar{x} \in C$, $g_3(\bar{x}) < g_1(\bar{x}) = g_2(\bar{x}) = g(\bar{x})$. De una expresión para un subgradiente de g en \bar{x} .
- 4.4** Considere

$$A^T = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -3 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 10 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} 4/35 \\ 9/70 \\ 1/10 \end{bmatrix}.$$

Muestre que la dirección Δx obtenida usando (4.24) (tome cualquier y y $s = c - A^T y$) coincide con la obtenida usando (4.28) y (4.29).
 Respuesta: $\Delta x = (0.065306, 0.073469, 0.057143)$.

4.5 Considere

$$A^T = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -3 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 10 \end{bmatrix}, \quad x^0 = \begin{bmatrix} 2/35 \\ 9/140 \\ 1/20 \end{bmatrix}.$$

Aplique el método potencial afín y el método de Newton primal factible para obtener el centro analítico.

Respuesta: $y = (0.63095, 2.55952)$.

4.6 Considere

$$A^T = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -3 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 10 \end{bmatrix}, \quad x^0 = \begin{bmatrix} 2/35 \\ 9/140 \\ 1/20 \end{bmatrix}, \quad y^0 = \begin{bmatrix} -0.5 \\ 1.5 \end{bmatrix}.$$

Aplique el método potencial primal-dual y el método de Newton primal-dual factible para obtener el centro analítico.

Respuesta: $y = (0.63095, 2.55952)$.

4.7 Resuelva por el método de planos de corte el siguiente problema:

$$\min f(x) = 1.4\|x - a^1\|_2 + 1.5\|x - a^2\|_2$$

$$\|x - a^3\|_1 \leq 3,$$

donde

$$a^1 = (2, 8),$$

$$a^2 = (10, 1),$$

$$a^3 = (-5, -4),$$

$$\|y\|_p = \left(\sum_1^n |y_i|^p \right)^{1/p}.$$

Solución: $x \approx (-2.23, -3.77)$.

4.8 Resuelva por ACCPM el problema anterior.

k	x_1^k s_1^k	x_2^k s_2^k	x_3^k s_3^k	x_4^k s_4^k	x_5^k s_5^k	y_1^k η	y_2^k θ	y_3^k Δy_3
	Δx_1	Δx_2	Δx_3	Δx_4	Δx_5	Δy_1	Δy_2	
	Δs_1	Δs_2	Δs_3	Δs_4	Δs_5			
0	0.3822 0.2000 0.4191 2.1969	0.4029 0.2000 0.3834 2.0917	0.5992 0.2000 0.5070 1.2997	0.3822 9.7759 -0.1974 -2.1102	3.6983 0.2667 6.2542 -0.4474	1.7531 3.1563 0.2028 0.1686	2.6694 0.0453 0.1686 0.0760	3.3108
1	0.4012 0.2996 0.4235 1.8764	0.4203 0.2948 0.3875 1.8127	0.6222 0.2589 0.5124 1.1351	0.3733 9.6802 -0.1995 -1.8265	3.9819 0.2464 6.3210 -0.3865	1.7623 3.0126 0.1730 0.1467	2.6770 0.0718 0.1467 0.0669	3.3143
2	0.4316 0.4343 0.4241 1.4556	0.4481 0.4250 0.3881 1.4386	0.6589 0.3404 0.5131 0.9121	0.3590 9.5491 -0.1998 -1.4473	4.4357 0.2187 6.3300 -0.3053	1.7747 2.7950 0.1339 0.1171	2.6876 0.1156 0.1171 0.0544	3.3191
3	0.4807 0.6026 0.4114 0.9621	0.4930 0.5913 0.3764 0.9858	0.7183 0.4459 0.4977 0.6374	0.3359 9.3818 -0.1938 -0.9897	5.1674 0.1834 6.1402 -0.2078	1.7901 2.4694 0.0881 -0.2078	2.7011 0.1918 0.0810 0.0387	3.3254
4	0.5596 0.7871 0.3667 0.4841	0.5651 0.7803 0.3355 0.5258	0.8137 0.5681 0.4436 0.3511	0.2987 9.1920 -0.1728 -0.5267	6.3450 0.1435 5.4731 -0.1098	1.8070 1.9923 0.0440 -0.1098	2.7166 0.3558 0.0438 0.0220	3.3328
5	0.6827 0.9497 0.2654 0.1458	0.6778 0.9569 0.2428 0.1756	0.9627 0.6860 0.3211 0.1239	0.2407 9.0151 -0.1250 -0.1756	8.1830 0.1067 3.9611 -0.0361	1.8218 1.3215 0.0131 -0.0361	2.7313 0.6603 0.0149 0.0081	3.3402
6	0.8580 1.0460	0.8382 1.0729	1.1747 0.7678	0.1581 8.8991	10.7985 0.0828	1.8305 0.4549	2.7412 0.4549	3.3455

Tabla 4.1. Ejemplo 4.17

Bibliografía

- [Ahu93] Ahuja R.K., Magnanti S.L., Orlin J.B., *Network Flows: Theory, Algorithms, and Applications*, Prentice Hall, Englewood-Cliffs N.J., 1993.
- [Bal95] Balakrishnan V. K., *Network Optimization*, Chapman & Hall, London, 1995.
- [BoG97] Bonnans J.F., Gilbert J.C., Lemaréchal C., Sagastizábal C., *Optimisation Numérique, Aspects théoriques et pratiques*, Springer, Paris, 1997.
- [BJS99] Bazaraa Mokhtar S., Jarvis J.J., Sherali H.D. *Programación lineal y flujo en redes*, Limusa, México, 1999.
- Bertsekas D.P., Network Optimization: Continuous and Discrete Models Athena Scientific, Belmont, 1998
- [Ber73] Berge Claude, *Graphes et hypergraphes*, 2 ed., Dunod, Paris, 1973
- [BoL00] Borewin J.M., Lewis A.S., *Convex Analysis and Nonlinear Optimization, Theory and Examples*, Springer, New York, 2000.
- [BoL00] Borewin J.M., Lewis A.S., *Convex Analysis and Nonlinear Optimization, Theory and Examples*, Springer, New York, 2000.
- [ChG59] Cheney E.W., Goldstein A.A., *Newton's Method for Convex Programming and Tchebycheff Approximation*, Numer. Math., I (1959), pp. 253-268.
- [CLR90] Cormen T.H., Leiserson C.L., Rivest R.L., *Introduction to Algorithms*, MIT Press, Cambridge, 1990.
- [DaW61] Dantzig G.B., Wolfe P., *Decomposition Principle for Linear Programming*, Econometrica 29-4 (1961), pp. 767-778.

- [Dew90] De Werra Dominique, *Eléments de programmation linéaire avec application aux graphes*, Presses Polytechniques Romandes, Lausanne, 1990.
- [Den96] Denault M., *On the Analytic Center Cutting Plane Method*, GERAD, McGill University, Montréal, 1996.
- [Dij59] Dijkstra E. W., *A Note on Two Problems in Connexion with Graphs*, Numer. Math., 1959, 1, págs. 269-271.
- [DuM95] Du Merle O., *Points intérieurs et plans coupants : mise en oeuvre et développement d'une méthode pour l'optimisation convexe et la programmation linéaire structurée de grande taille*, Tesis doctoral, U. Ginebra, 1995.
- [Flo62] Floyd R. W., *Algorithm 97, Shortest Path*, Commun. ACM, 1962, 5, pág. 345.
- [EiS00] Eiselt H.A., Sandblom C.-L., *Integer Programming and Networks Models*, Springer, Berlin, 2000.
- [Eva92] Evans James R., Minieka Edward, *Optimization Algorithms for Networks and Graphs*, 2 ed., Marcel Dekker, New York, 1992.
- [GoHV92] Goffin J.L., Haurie A., Vial J.Ph., *Decomposition and nondifferentiable optimization with the projective algorithm*, Management Science, 38 (1992), pp. 284-302.
- [GoHV93] Goffin J.L., Haurie A., Vial J.Ph., Zhu D.L., *Using central prices in the decomposition of linear programs*, European J. of Operational Research, 64 (1993), pp. 393-409.
- [GoVi90] Goffin J.L., Vial J.Ph., *Cutting planes and column generation techniques with the projective algorithm*, J. Optimization Theory and Appl., 65 (1990), pp. 409-429.
- [GoVa96] Golub G.H., Van Loan C.F., *Matrix Computations*, 3rd ed., Johns Hopkins U. Press, Baltimore, 1996.
- [HiL93] Hiriart-Urruty J.B., Lemaréchal C., *Convex Analysis and Minimization Algorithms*, Vol. I, II, Springer Verlag, New York, 1993.
- [Kel60] Kelley J.E., *The Cutting Plane Method for Solving Convex programs*, Journal SIAM, 8 (1960), pp. 703-712.

- [Las70] Lasdon Leon S. *Optimization Theory for Large Systems*, Macmillan, New York, 1970.
- [Lem89] Lemaréchal C., *Nondifferentiable Optimization*, en Nemhauser G.L. et al., eds., *Handbooks in Operations Research and Management Science, Vol. 1, Optimization*, North-Holland, Amsterdam, 1989.
- [Min83] Minoux M., *Programmation Mathématique, Théorie et Algorithmes*, tome 1, 2, Dunod, Paris, 1983
- [NeW99] Nemhauser George L., Wolsey Laurence A., *Integer and Combinatorial Optimization*, Wiley, New York, 1999.
- [Nor80] Norel G., *Initiation aux modèles de gestion*, U. Paris IX Dauphine, Paris, 1980.
- [Pri94] Prins Christian, *Algorithmes de graphes*, Eyrolles, Paris, 1994.
- [Rar98] Rardin Ronald L. *Optimization in Operations Research*, Prentice Hall, Upper Sadle River, 1998.
- [Sac74] Sache Aimé, *La théorie des graphes*, Presses Universitaires de France, Paris, 1974.
- [Wil90] Wilson Robin J., Watkins John J., *Graphs, An Introductory Approach*, Wiley, New York, 1990.
- [Wol98] Wolsey Laurence A., *Integer Programming*, Wiley, New York, 1998.
- [Ye97] Ye Yinyu, *Interior Point Algorithms: Theory and Analysis*, Wiley, New York, 1997.

Índice alfabético

- 1-grafo, 90
absorbente, circuito, 105
ACCPM, algoritmo, 208
ACCPM, analytic center cutting plane method, 187
acople, restricciones de, 16
actividad redundante, 144
admisible, dirección, 172
admisible, flujo, 117
adyacente, 92
adyacente, vértice, 103
adyacentes, aristas, 103
agente viajero, problema del, 56
AGM, árbol generador minimal, 146
aislado, 92
algoritmo ACCPM, 208
algoritmo de Dijkstra, 106
algoritmo de Floyd-Warshall, 112, 134
algoritmo de Ford-Fulkerson, 119
algoritmo de Kruskal, 151
algoritmo de Prim, 153
algoritmo matricial de Prim, 154
algoritmo potencial afín, 199
algoritmo potencial primal-dual, 204
algoritmo voraz, 151, 153
analítico, centro, 188
ancho, a lo, 74
ancho, búsqueda a lo, 147
angular, forma, 19
angular, matriz, 19
antedecesor, 92
antiraíz, 93
antisimétrico, grafo, 91
aproximaciones, 84
árbol, 103
árbol binario con raíz, 68
árbol de expansión, 104
árbol generador, 104
árbol generador mínimo, 146
árbol generador minimal, 146
arco, 89
arco inverso, 131
arco normal, 131
arista, 91
aristas adyacentes, 103
ascendiente, 93
aumentante, cadena, 121
backtracking, 75
base, 93
BFS, 147
bifurcación y acotamiento, 65
branch and bound, 65
bucle, 91
búsqueda a lo ancho, 147
cadena, 93, 103
cadena aumentante, 121
cadena mejorable, 121
cadena, longitud de una, 103
caja, restricciones de, 1
camino, 93
camino elemental, 94

- camino euleriano, 95
camino hamiltoniano, 94
camino más corto, 104
camino minimal, 104
camino preeuleriano, 95
camino prehamiltoniano, 94
camino simple, 94
camino, costo de un, 104
camino, longitud de un, 104
capacidad de un corte, 117
centro analítico, 188
centros, método de los, 188
Cheney-Goldstein, método de, 174
ciclo, 93
ciclo, detección de un, 147
circuito, 93
circuito absorbente, 105
circuito de actividades, 143
circuito, detección de un, 99
CMC, camino más corto, 104
componente conexa, 103
conexa, componente, 103
conexo, grafo, 103, 104
conjunto convexo, 167
conjunto corte, 146
conjunto desconectante, 146
conjunto separable, 16
convexo, conjunto, 167
cortante, plano, 61
corte, 61, 117
corte de factibilidad, 181
corte de optimalidad, 176
corte, capacidad de un, 117
corte, conjunto, 146
corte, flujo de un, 117
cortes de Gomory, 61
costo de un camino, 104
costo mínimo, flujo de, 130
CPM, 135
crítica, ruta, 135
critical path method, 135
Dantzig y Wolfe, método de, 15
descartado, nodo, 69
descendiente, 93
descendientes, detección de, 96
descomposición, método de, 15
desconectante, conjunto, 146
destino, 92
detección de descendientes, 96
detección de un ciclo, 147
detección de un circuito, 99
diccionario de sucesores, 92
digrafo, 90
Dijkstra, algoritmo de, 106
dirección admisible, 172
dirigido, grafo, 90
ejemplos de OND, 165
elemental, camino, 94
escalera, matriz, 18
escogencia de la rama, 76
escogencia de la variable que bifurca, 72
estacionario, punto, 172
euleriano, camino, 95
expansión, árbol de, 104
factibilidad, corte de, 181
flecha, 89
Floyd-Warshall, algoritmo de, 112, 134
flujo óptimo, 118
flujo admisible, 117
flujo de costo mínimo, 130
flujo de un corte, 117
flujo máximo, 116, 131
Ford-Fulkerson, algoritmo de, 119
forma angular, 19
fraccionaria, parte, 62
fuente, 93
Fulkerson-Ford, algoritmo de, 119

- generado, subgrafo, 94
 generador, árbol, 104
 Goldstein-Cheney, método de, 174
 Gomory, cortes de, 61
 grafo, 89, 90
 grafo antisimétrico, 91
 grafo conexo, 103, 104
 grafo dirigido, 90
 grafo no dirigido, 102
 grafo parcial, 93
 grafo simétrico, 91
 grafo simple, 91
greedy, 151

 haces, método de, 186
 hamiltoniano, camino, 94
 hijo, 68
 holgura de un evento, 138

 incidencia nodo-arco, matriz de, 95
 incidencia nodo-nodo, matriz de, 95
 incidencia, matriz de, 95
 inversión, problema de, 55
 inverso, arco, 131

 Kelley, método de, 174
 Kruskal, algoritmo de, 151

 LIFO, 75
 lineal, relajación, 60
 longitud de un camino, 104
 longitud de una cadena, 93, 103

 más corto, camino, 104
 matriz angular, 19
 matriz de incidencia, 95
 matriz de incidencia nodo-arco, 95
 matriz de incidencia nodo-nodo, 95
 matriz escalera, 18
 máximo flujo, 116, 131
 mejor nodo, 75

 mejorable, cadena, 121
 método de Cheney-Goldstein, 174
 método de Dantzig y Wolfe, 15
 método de descomposición, 15
 método de haces, 186
 método de Kelley, 174
 método de los centros, 188
 método de Newton, 192
 método de Newton primal factible, 195
 método de planos cortantes, 174
 método del subgradiente, 173
 método primal factible, 195
 método primal, restricción adicional, 206
 método primal-dual factible, 201
 método simplex acotado, 1
 método simplex acotado, dos fases, 10
 método simplex acotado, una fase, 4
 métodos de punto interior, 192
minimal spanning tree, 146
 minimal, camino, 104
 mínimo, costo, 130
 MPC, método de planos cortantes, 174
 MSA, método simplex acotado, 2
 MST, *minimal spanning tree*, 146
 multigrafo, 91

 Newton, método de, 192
 no dirigido, grafo, 102
 no restringido, problema, 175
 nodo, 89
 nodo mejor, 75
 normal, arco, 131

 OE, optimización entera, 53
 OND, optimización no diferenciable, 165

- optimalidad, 170
 optimalidad, corte de, 176
 optimización convexa no diferenciable, 169
 optimización entera, 53
 optimización lineal, 1
 optimización no diferenciable, 165
 óptimo, flujo, 118
 origen, 92
p-grafo, 89
 padre, 68
 parcial, grafo, 93
 parte fraccionaria, 62
 plano cortante, 61
 planos cortantes, método de, 174
 potencial, 105
 potencial afín, algoritmo, 199
 potencial primal-dual, algoritmo, 204
 predecesor, 92
 preeuleriano, camino, 95
 prehamiltoniano, camino, 94
 preprocesso de la lista de actividades, 142
 Prim, algoritmo de, 153
 Prim, algoritmo matricial de, 154
 primal factible, método, 195
 primal-dual factible, método, 201
 primal-dual, algoritmo potencial, 204
 problema de inversión, 55
 problema de secuenciación, 54
 problema del agente viajero, 56
 problema no restringido, 175
 problema restringido, 180
 problema separable, 16
 profundidad, 74
 programación entera, 53
 programación lineal, 1
pruned, 69
 punto estacionario, 172
 punto interior, métodos de, 192
 raíz, 93
 rama, escogencia de la, 76
 ramificación y acotamiento, 65
 red, 104
 red, simplificación de una, 141
 redundante, actividad, 144
 relajación, 60
 relajación lineal, 60
 restricción adicional en el método primal, 206
 restricciones de acople, 16
 restricciones de caja, 1
 restringido, problema, 180
 ruta, 93
 ruta crítica, 135, 138
 secuenciación, problema de, 54
 separable, conjunto, 16
 separable, problema, 16
 simétrico, grafo, 91
 simple, camino, 94
 simple, grafo, 91
 simplex acotado, método, 1
 simplificación de una red, 141
spanning tree, 104
 subdiferencial, 170
 subgradiente, 170
 subgrafo, 94
 subgrafo generado, 94
 sucesor, 92
 sucesores, diccionario de, 92
 sumidero, 93
 tiempo más pronto, 137
 tiempo más tardío, 137
 trayectoria, 93
 TSP, 56
 variable que bifurca, escogencia, 72

vecino, 92
vecino, vértice, 103
vértice, 89
vértice adyacente, 103
vértice vecino, 103
voraz, algoritmo, 151, 153
vuelta hacia atrás, 75

Warshall-Floyd, algoritmo de, 112, 134
Wolfe y Dantzig, método de, 15