Un ejemplo de "Ramificación y Corte"

Johanna Garzón

Resumen

Se aplica el método de Ramificación y corte en la solución de un problema de asignación generalizado.

1 Problema

Un problema de asignación generalizado es un problema de programación lineal entera (binaria) con la siguiente estructura:

$$\max \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

sujeto a

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq 1 \quad \text{para} \quad i = 1, \ldots, m$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_{ij} \leq b_j \quad \text{para} \quad j = 1, \ldots, n$$

$$x \in \mathbb{B}^{mn}$$

Por ejemplo, tomando $m = 6$, $n = 4$, $b = (91, 87, 109, 88)^T$ y

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} 110 & 16 & 25 & 78 \\ 65 & 69 & 54 & 28 \\ 19 & 93 & 45 & 45 \\ 89 & 31 & 72 & 83 \\ 62 & 17 & 77 & 18 \\ 37 & 115 & 87 & 59 \end{pmatrix} \qquad a_{ij} = \begin{pmatrix} 95 & 1 & 21 & 66 \\ 54 & 53 & 44 & 26 \\ 3 & 91 & 43 & 42 \\ 72 & 30 & 56 & 72 \\ 44 & 1 & 71 & 13 \\ 20 & 99 & 87 & 52 \end{pmatrix}$$

el problema a resolver es

$$\max \begin{array}{ccccccccc} 110x_{11} & + & 16x_{12} & + & 25x_{13} & + & 78x_{14} & + \\ 65x_{21} & + & 69x_{22} & + & 54x_{23} & + & 28x_{24} & + \\ 19x_{31} & + & 93x_{32} & + & 45x_{33} & + & 45x_{34} & + \\ 89x_{41} & + & 31x_{42} & + & 72x_{43} & + & 83x_{44} & + \\ 62x_{51} & + & 17x_{52} & + & 77x_{53} & + & 18x_{54} & + \\ 37x_{61} & + & 115x_{62} & + & 87x_{63} & + & 59x_{64} & + \end{array}$$

sujeto a:

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} &\leq 1 \quad \mathbf{R_1} \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} &\leq 1 \quad \mathbf{R_2} \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} &\leq 1 \quad \mathbf{R_3} \\ x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} &\leq 1 \quad \mathbf{R_4} \\ x_{51} + x_{52} + x_{53} + x_{54} &\leq 1 \quad \mathbf{R_5} \\ x_{61} + x_{62} + x_{63} + x_{64} &\leq 1 \quad \mathbf{R_6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 95x_{11} + 54x_{21} + 3x_{31} + 72x_{41} + 44x_{51} + 20x_{61} &\leq 91 \quad \mathbf{R_7} \\ x_{12} + 53x_{22} + 91x_{32} + 30x_{42} + x_{52} + 99x_{62} &\leq 87 \quad \mathbf{R_8} \\ 21x_{13} + 44x_{23} + 43x_{33} + 56x_{43} + 71x_{53} + 87x_{63} &\leq 109 \quad \mathbf{R_9} \\ 66x_{14} + 26x_{24} + 42x_{34} + 72x_{44} + 13x_{54} + 52x_{64} &\leq 88 \quad \mathbf{R_{10}} \\ x &\in \mathbb{B}^{24} \end{aligned}$$

2 Solución

Para resolver el problema anterior utilizamos el método de "Ramificación y Corte" el cual relaciona el método de "Ramificación y Acotamiento" y el método de "Planos de Corte".

Para ramificar el criterio que se siguió fue ramificar la variable con mayor parte entera y elegir la rama ≤ 0. Los cortes realizados se hicieron utilizando las restricciones R_7, R_8, R_9 y R_{10}, se construye el corte dividiendo la restricción por una constante adecuada y tomando la parte entera inferior de los coeficientes, esta nueva restricción es una restricción válida para nuestro problema y elimina la solución anterior de la región factible.

Las variables x_{11}, x_{32}, x_{62} no pueden tomar el valor de 1, puesto que $a_{ij} > b_j$ para estas variables, por lo tanto, en la función objetivo cambiamos sus costos por costos negativos para obligarlas a tomar el valor cero.

Iteración 0. Resolver el problema relajado. $x_{14} = 1,\ x_{22} = 1,\ x_{31} = 0.804261,$ $x_{34} = 0.195739$ $x_{41} = 0.808625,$ $x_{44} = 0.191375,$ $x_{51} = 0.690141,$ $x_{53} = 0.309859,$ $x_{63} = 1,$ $x_{ij} = 0$ en otro caso, $z^* = 412.5888$. Cota superior $\overline{z^*} = 412.5888$.

Iteración 1. Corte: introducimos una desigualdad válida que no cumpla el punto anterior. Tomamos la restricción R_1, la dividimos por 43 y tomamos parte entera inferior de sus coeficientes $\lfloor \frac{R_9}{43} \rfloor$

$$\left\lfloor \frac{21}{43} \right\rfloor x_{13} + \left\lfloor \frac{44}{43} \right\rfloor x_{23} + \left\lfloor \frac{43}{43} \right\rfloor x_{33} + \left\lfloor \frac{56}{43} \right\rfloor x_{43} + \left\lfloor \frac{71}{43} \right\rfloor x_{53} + \left\lfloor \frac{87}{43} \right\rfloor x_{63} \leq \left\lfloor \frac{109}{43} \right\rfloor$$

$$x_{23} + x_{33} + x_{43} + x_{53} + 2x_{63} \leq 2 \quad \mathbf{R_{11}}$$

Resolver el problema sujeto a las restricciones R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6, R_7, R_8, R_9, R_{10}. $x_{14} = 1, x_{22} = 1, x_{31} = 0.476190, x_{34} = 0.523810, x_{41} = 1, x_{51} = 0.222689, x_{53} = 0.777311, x_{61} = 0.388655, x_{63} = 0.611345,$ $x_{ij} = 0$ en otro caso. $z^* = 409.8459$

Iteración 2. Ramificación:

$$x_{53} \leq 0 \quad \mathbf{R_{12}}$$

Resolver el problema sujeto a las restricciones R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6, R_7, R_8, R_9, R_{10}, R_{11}, R_{12}. $x_{14} = 1, x_{22} = 1, x_{31} = 0.709437, x_{34} = 0.290563, x_{41} = 0.623218, x_{43} = 0.376782, x_{51} = 1, x_{63} = 0.811609, x_{64} = 0.188391,$ $x_{ij} = 0$ en otro caso. $z^* = 399.8744$

Iteración 3. Corte:

$$\left\lfloor \frac{R_{10}}{33} \right\rfloor$$

$$2x_{14} + x_{34} + x_{44} + x_{64} \leq 2 \quad \mathbf{R_{13}}$$

Resolver el problema sujeto a las restricciones $R_1, \ldots, R_{13}$. $x_{13} = 0.586806, x_{14} = 0.413194, x_{22} = 1, x_{34} = 1, x_{41} = 0.652778, x_{43} = 0.347222, x_{51} = 1, x_{63} = 0.826389, x_{64} = 0.173611,$ $x_{ij} = 0$ en otro caso. $z^* = 388.1354$

Iteración 4. Ramificación:

$$x_{63} \leq 0 \quad \mathbf{R_{14}}$$

Resolver el problema sujeto a las restricciones $R_1, \ldots, R_{14}$. $x_{13} = 0.5, x_{14} = 0.5, x_{22} = 1, x_{33} = 1, x_{41} = 0.652778, x_{43} = 0.347222, x_{51} = 1, x_{64} = 1,$ $x_{ij} = 0$ en otro caso. $z^* = 369.59$

Iteración 5. Corte:

$$\left\lfloor \frac{R_7}{36} \right\rfloor$$

$$2x_{11} + x_{21} + 2x_{41} + x_{51} \leq 2 \quad \mathbf{R_{15}}$$

Resolver el problema sujeto a las restricciones $R_1, \ldots, R_{15}$. $x_{13} = 0.5$, $x_{14} = 0.5, x_{22} = 1, x_{33} = 1, x_{41} = 0.5, x_{43} = 0.5, x_{51} = 1, x_{64} = 1, x_{ij} = 0$ en otro caso.$z^* = 367$

Iteración 6. Ramificación:

$$x_{13} \leq 0 \quad \mathbf{R_{16}}$$

Resolver el problema sujeto a las restricciones $R_1, \ldots, R_{16}$
Solución entera $x_{14} = 1, x_{22} = 1, x_{33} = 1, x_{43} = 1, x_{51} = 1, x_{61} = 1, x_{ij} = 0$ en otro caso. $z^* = 363$. Modificamos la cota inferior del problema por $\underline{z^*} = 363$

Iteración 7. Ramificación:

$$x_{13} \geq 1 \quad \mathbf{R_{17}}$$

Resolver el problema sujeto a las restricciones $R_1, \ldots, R_{14}, R_{15}, R_{17}$ $x_{13} = 1, x_{22} = 1, x_{33} = 1, x_{41} = 0.5, x_{44} = 0.5, x_{51} = 1, x_{64} = 1, x_{ij} = 0$ en otro caso. $z^* = 346$ Podamos este ramo por cota.

Iteración 8. Ramificación:

$$x_{63} \geq 1 \quad \mathbf{R_{18}}$$

Resolver el problema sujeto a las restricciones $R_1, \ldots, R_{11}$, R_{12}, R_{13}, R_{15}, R_{18}. $x_{14} = 1, x_{22} = 1, x_{31} = 1, x_{41} = 0.5, x_{42} = 0.5, x_{51} = 1, x_{63} = 1, x_{ij} = 0$ en otro caso.$z^* = 375$

Iteración 9. Como no fue posible encontrar una desigualdad válida que eliminara la solución óptima anterior se volvió a ramificar bajo el criterio seguido.

$$x_1 \leq 0 \quad \mathbf{R_{19}}$$

Resolver el problema sujeto a las restricciones $R_1, \ldots, R_{11}$, R_{12}, R_{13}, R_{15}, R_{18}, R_{19}. Solución entera $x_{14} = 1, x_{22} = 1, x_{31} = 1, x_{42} = 1, x_{51} = 1, x_{63} = 1, x_{ij} = 0$ en otro caso. $z^* = 346$ (no se modifica la cota inferior)
Podamos esta rama por cota

Iteración 10. Ramificación:

$$x_1 \geq 1 \quad \mathbf{R_{20}}$$

Resolver el problema sujeto a las restricciones $R_1, \ldots, R_{11}$, R_{12}, R_{13}, R_{15}, R_{18},R_{20}. Solución entera $x_{13} = 1, x_{22} = 1, x_{31} = 1, x_{41} = 1, x_{54} = 1, x_{63} = 1, x_{ij} = 0$ en otro caso. $z^* = 360$ (no se modifica la cota inferior) Podamos esta rama por cota.

Iteración 11. Ramificación:

$$x_{53} \geq 1 \quad \mathbf{R_{21}}$$

Resolver el problema sujeto a las restricciones $R_1, \ldots, R_{10}$, R_{11}, R_{13}, R_{15}, R_{21}. $x_{12} = 0.281609, x_{14} = 0.718391, x_{22} = 1, x_{31} = 1, x_{41} = 1, x_{53} = 1, x_{63} = 0.436782, x_{64} = 0.563218, x_{ij} = 0$ en otro caso. $z^* = 385.77$

Iteración 12. Corte:

$$\left\lfloor \frac{R_{10}}{52} \right\rfloor$$

$$x_{14} + x_{44} + x_{64} \leq 1 \quad \mathbf{R_{22}}$$

Resolver el problema sujeto a las restricciones $R_1, \ldots, R_{10}$, R_{11}, R_{13}, R_{15}, R_{21}, R_{22}. $x_{12} = 0.563218, x_{14} = 0.436782, x_{22} = 1, x_{31} = 0.436782, x_{34} = 0.563218, x_{41} = 1, x_{53} = 1, x_{63} = 0.563218, x_{64} = 0.563218, x_{ij} = 0$ en otro caso. $z^* = 382.954$

Iteración 13. Ramificación:

$$x_{12} \leq 0 \quad \mathbf{R_{23}}$$

Resolver el problema sujeto a las restricciones $R_1, \ldots, R_{10}$, R_{11}, R_{13}, R_{15}, R_{21}, R_{23}. $x_{13} = 0.742424, x_{14} = 0.257576, x_{22} = 1, x_{31} = 0.257576, x_{34} = 0.742424, x_{41} = 1, x_{53} = 1, x_{63} = 0.257576, x_{64} = 0.742424, x_{ij} = 0$ en otro caso. $z^* = 378.167$

Iteración 14. Corte:

$$\left\lfloor \frac{R_9}{10} \right\rfloor$$

$$2x_{13} + 4x_{23} + 4x_{33} + 5x_{43} + 7x_{53} + 81x_{63} \leq 10 \quad \mathbf{R_{24}}$$

Resolver el problema sujeto a las restricciones $R_1, \ldots, R_{10}$, R_{11}, R_{13}, R_{15}, R_{21}, R_{22}, R_{23}, R_{24}. $x_{13} = 0.785714, x_{14} = 0.214286, x_{22} = 1, x_{31} = 0.214286, x_{34} = 0.785714, x_{41} = 0.982143, x_{42} = 0.017857, x_{53} = 1, x_{61} = 0.035714, x_{63} = 0.178571, x_{64} = 0.785714, x_{ij} = 0$ en otro caso. $z^* = 372.9643$

Iteración 15. Ramificación:

$$x_{41} \leq 0 \quad \mathbf{R_{25}}$$

Resolver el problema sujeto a las restricciones $R_1, \ldots, R_{10}$, R_{11}, R_{13}, R_{15}, R_{21},R_{22}, R_{23}, R_{24}, R_{25}. $x_{14} = 1, x_{22} = 1, x_{31} = 1, x_{42} = 0.4, x_{43} = 0.6, x_{53} = 1, x_{61} = 1, x_{ij} = 0$ en otro caso. $z^* = 335.6$
Podamos esta rama por cota.

Iteración 16. Ramificación:

$$x_{41} \geq 1 \quad \mathbf{R_{26}}$$

Resolver el problema sujeto a las restricciones $R_1, \ldots, R_{10}$, R_{11}, R_{13}, R_{13}, R_{15}, R_{21},R_{22}, R_{23}, R_{24}, R_{26}. $x_{13} = 0.785714, x_{14} = 0.214286, x_{22} = 1$, $x_{31} = 0.214286, x_{34} = 0.785714, x_{41} = 1, x_{53} = 1, x_{63} = 0.178571$, $x_{64} = 0.785714, x_{ij} = 0$ en otro caso. $z^* = 372.679$

Iteración 17. Corte:

$$\left\lfloor \frac{R_9}{71} \right\rfloor$$

$$x_{53} + x_{63} \leq 1 \quad \mathbf{R_{27}}$$

Resolver el problema sujeto a las restricciones $R_1, \ldots, R_{10}$, R_{11}, R_{12}, R_{13}, R_{15}, R_{21},R_{22}, R_{23}, R_{24}, R_{26}, R_{27}. $x_{13} = 1, x_{22} = 1, x_{33} = 0.25, x_{34} = 0.75$, $x_{41} = 1, x_{53} = 1, x_{64} = 1, x_{ij} = 0$ en otro caso. $z^* = 364$

Iteración 18. Ramificación:

$$x_{34} \leq 0 \quad \mathbf{R_{28}}$$

Resolver el problema sujeto a las restricciones $R_1, \ldots, R_{10}$, R_{11}, R_{12}, R_{13}, R_{15}, R_{21},R_{22}, R_{23}, R_{24}, R_{26}, R_{27}, R_{28}. $x_{14} = 1, x_{22} = 1, x_{31} = 0.25$, $x_{33} = 0.75, x_{41} = 1, x_{53} = 1, x_{ij} = 0$ en otro caso. $z^* = 351.5$
Podamos esta rama por cota.

Iteración 19. Ramificación:

$$x_{34} \geq 1 \quad \mathbf{R_{29}}$$

Resolver el problema sujeto a las restricciones $R_1, \ldots, R_{10}$, R_{11}, R_{13}, R_{15}, R_{21},R_{22}, R_{23}, R_{24}, R_{26}, R_{29}. $x_{13} = 1, x_{22} = 1, x_{34} = 1, x_{41} = 1, x_{53} = 1$, $x_{64} = 0.884615, x_{ij} = 0$ en otro caso. $z^* = 357.1923$
Podamos esta rama por cota.

Iteración 20. Ramificar:

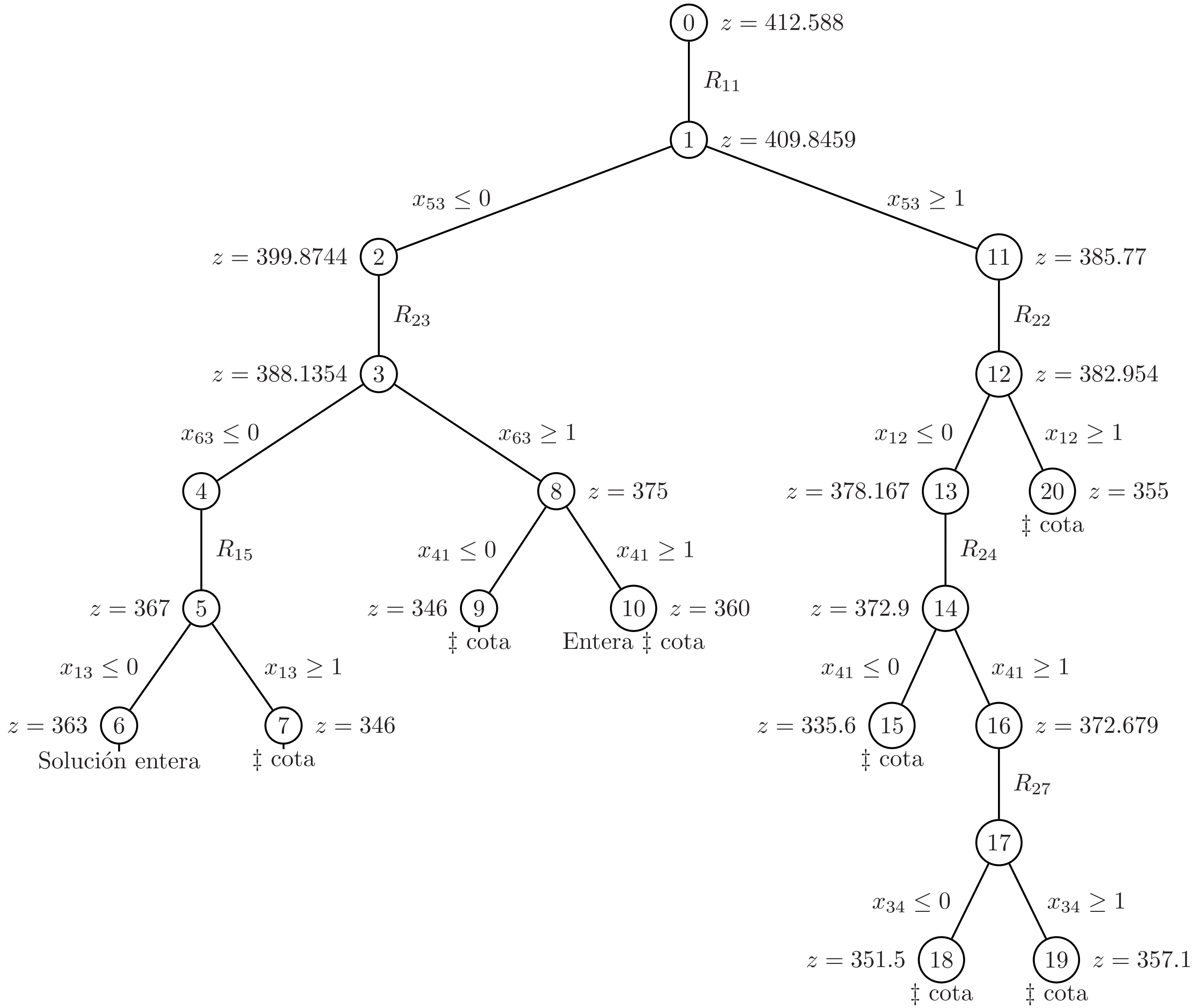
$$x_{12} \geq 1 \quad \mathbf{R_{30}}$$

Resolver el problema sujeto a las restricciones $R_1, \ldots, R_{10}$, R_{11}, R_{13}, R_{15}, R_{21},R_{22}, R_{24}, R_{27}, R_{30}. $x_{12} = 1, x_{22} = 1, x_{33} = 0.142857, x_{34} = 0.857143$, $x_{41} = 1, x_{53} = 1, x_{64} = 1, x_{ij} = 0$ en otro caso. $z^* = 355$
Podamos esta rama por cota.

La **solución** al problema propuesto es:

$x_{14} = 1, x_{22} = 1, x_{33} = 1, x_{43} = 1, x_{51} = 1, x_{61} = 1, x_{ij} = 0$ en otro caso. $z^* = 363$.

∞


0
z = 412.588
R11
1
z = 409.8459
x53 ≤ 0
x53 ≥ 1
2
z = 399.8744
11
z = 385.77
R23
R22
3
z = 388.1354
12
z = 382.954
x63 ≤ 0
x63 ≥ 1
x12 ≤ 0
x12 ≥ 1
4
8
z = 375
z = 378.167
13
20
z = 355
‡ cota
R15
x41 ≤ 0
x41 ≥ 1
R24
z = 367
5
z = 346
9
‡ cota
10
z = 360
Entera ‡ cota
z = 372.9
14
x13 ≤ 0
x13 ≥ 1
x41 ≤ 0
x41 ≥ 1
z = 363
6
Solución entera
7
z = 346
‡ cota
z = 335.6
15
‡ cota
16
z = 372.679
R27
17
x34 ≤ 0
x34 ≥ 1
z = 351.5
18
‡ cota
19
z = 357.1
‡ cota