Programación dinámica

Héctor Manuel Mora Escobar

November 3, 2016

Este capítulo, pretende presentar la principal idea de la programación dinámica: *toda subpolítica de una política óptima también debe ser óptima.* El anterior principio se conoce como el principio de optimalidad de Richard Bellman.

El nombre de programación dinámica se debe a que inicialmente el método se aplicó a la optimización de algunos sistemas dinámicos, es decir, sistemas que evolucionan con el tiempo. Sin embargo, el tiempo no es indispensable, se requiere simplemente que los sistemas se puedan expresar por etapas o por fases.

Dicho de otra forma, la idea básica de la programación dinámica consiste en convertir un problema de n variables en una sucesión de problemas más simples, por ejemplo, de una variable, y para más sencillez, una variable discreta.

Desde un punto de vista recurrente[1]: un problema complejo se resuelve mediante el planteamiento de problemas más sencillos pero análogos al problema general. Estos problemas más sencillos se resuelven mediante el planteamiento de problemas aún más sencillos pero que siguen guardando la misma estructura. Este proceso recurrente se aplica hasta encontrar problemas de solución inmediata. Una vez resueltos estos problemas supersencillos se pasa a la solución de los problemas un poquito mas complejos y así sucesivamente hasta calcular la solución del problema general.

Aunque el principio es muy sencillo y aplicable a muchos problemas, se aplica de manera específica a cada problema. Es decir, no existe un algoritmo (o un programa de computador) único que se pueda aplicar a todos los problemas.

En lugar de presentar fórmulas, definiciones o conceptos generales pero abstractos, se presentan ejemplos típicos con sus soluciones. Todos los ejemplos presentados son determinísticos, es decir, se supone que todos los datos del problema son conocidos de manera precisa.

0.1 EL PROBLEMA DE LA RUTA MÁS CORTA

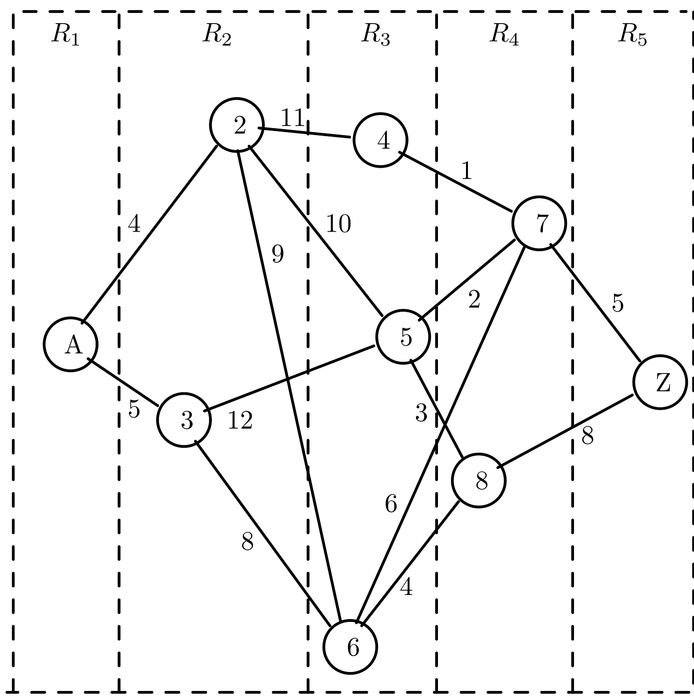
0.1.1 Enunciado del problema

El Ministerio de Obras desea construir una autopista entre la ciudad de Girardot, que denotaremos simplemente por A y la ciudad de Barranquilla denotada por$Z$. Globalmente, la autopista sigue la dirección del río Magdalena. El valle del río y su zona de influencia directa se dividió en una sucesión de n regiones adyacentes que, por facilidad, llamaremos R_1, R_2, ... R_n. La ciudad A está en R_1 y Z está en R_n. La autopista pasa por todas las n regiones, pero está previsto que pase solamente por una ciudad de cada región. Sin embargo en algunas regiones hay varias ciudades importantes y cada una de ellas podría

[1]Con cierta frecuencia, en lugar de recurrente, se utiliza el término “recursivo”, anglicismo usado para la traduccion de “recursive”.

ser la ciudad de la región por donde pasa la autopista. Con este esquema, el Ministerio está estudiando muchos tramos de autopista, cada tramo va de una ciudad en una región, a otra ciudad en la región siguiente. Sin embargo, de cada ciudad en una región no hay necesariamente tramos a todas las ciudades de la siguiente región. Pero por otro lado, para cada ciudad de la regiones intermedias, de la 2 a la $n-1$, hay por lo menos un tramo proveniente de una ciudad de la región anterior y por lo menos un tramo que va hasta una ciudad de la siguiente región.

Para cada uno de estos tramos posibles el Ministerio ha calculado un costo total que tiene en cuenta, entre otros aspectos, la distancia, las dificultades específicas de la construcción, el sobrecosto del transporte desde otras ciudades de cada región hasta la ciudad por donde pasa la autopista.



El objetivo del Ministerio es encontrar una sucesión de tramos concatenados, que van desde A hasta Z, con costo mínimo.

Las condiciones del problema se pueden formalizar de la siguiente manera:

- $N = \{A, ..., Z\}$ conjunto de ciudades o nodos. N es simplemente un conjunto finito cualquiera (no necesariamente un subconjunto del abecedario), en el cual están A y Z.
- R_1, R_2, ..., R_n forman una partición de N, es decir,

$$
\begin{aligned}
R_1 \cup R_2 \cup ... \cup R_n = N&,\\
R_i \neq \emptyset \ , \quad i = 1, ..., n&,\\
R_i \cap R_j = \emptyset \ \text{ si } \quad i \neq j&.
\end{aligned}
$$

- $R_1 = \{A\}$.
- $R_n = \{Z\}$.
- $\Gamma \subseteq N \times N$ conjunto de tramos posibles ("flechas" del grafo[2]).
- Si $(i, j) \in \Gamma$ entonces existe $1 \leq k \leq n-1$ tal que $i \in R_k$ y $j \in R_{k+1}$.
- Para $1 \leq k \leq n-1$, si $i \in R_k$ entonces existe $j \in R_{k+1}$ tal que $(i, j) \in \Gamma$.
- Para $2 \leq k \leq n$, si $i \in R_k$ entonces existe $j \in R_{k-1}$ tal que $(j, i) \in \Gamma$.
- Si $(i, j) \in \Gamma$ entonces se conoce $c(i, j) = c_{ij} > 0$.

En teoría de grafos se habla de predecesor, sucesor, conjunto de predecesores, conjunto de sucesores. La utilización de estos conceptos, con sus respectivas notaciones, facilita y hace más compacto el planteamiento del problema. Si la flecha (i, j) está en el grafo se dice que i es un **predecesor** de j, y que j es un **sucesor** de i. Se denota por $\Gamma^-(i)$ el conjunto de predecesores de i y por $\Gamma^+(i)$ el conjunto de sus sucesores. Entonces:

- $\Gamma^-(i) \neq \emptyset, \ \forall i \neq A$.
- $\Gamma^+(i) \neq \emptyset, \ \forall i \neq Z$.
- $i \in R_k \ \Rightarrow \ \Gamma^-(i) \subseteq R_{k-1}, \ k = 2, ..., n$.
- $i \in R_k \ \Rightarrow \ \Gamma^+(i) \subseteq R_{k+1}, \ k = 1, ..., n-1$.

0.1.2 Planteamiento del problema de optimización

El problema se puede presentar de la siguiente manera: encontrar i_1, i_2, ..., i_n para minimizar una función con ciertas restricciones:

$$
\begin{aligned}
\min c(i_1, i_2) + c(i_2, i_3) + ... + c(i_{n-1}, i_n) = \sum_{k=1}^{n-1} c(i_k, i_{k+1})&\\
(i_k, i_{k+1}) \in \Gamma, \ k = 1, ..., n-1&\\
i_k \in R_k, \ k = 1, ..., n.&
\end{aligned}
$$

[2] Un grafo G es una pareja $G = (N, \Gamma)$, donde N es el conjunto finito de vértices y $\Gamma \subseteq N \times N$ es el conjunto de flechas

En realidad el problema depende únicamente de $n-2$ variables: i_2, i_3, ..., i_{n-1} ya que $i_1 = A$, $i_n = Z$. Además la última condición se puede quitar puesto que ya está implícita en las propiedades de Γ.

A cada una de las ciudades de R_2 llega por lo menos un tramo desde una ciudad de R_1, pero como en R_1 solo hay una ciudad entonces: a cada una de las ciudades de R_2 llega por lo menos una ruta desde A. A su vez, a cada una de las ciudades de R_3 llega por lo menos un tramo desde una ciudad de R_2 y como a cada ciudad de R_2 llega una ruta desde A entonces: a cada una de las ciudades de R_3 llega por lo menos una ruta desde A. Repitiendo este proceso se puede deducir que a cada una de las ciudades llega por lo menos una ruta desde A. En particular existe por lo menos una ruta desde A hasta Z.

Una manera de resolver este problema es utilizando la **fuerza bruta**: hacer una lista de todas las rutas posibles desde A hasta Z, para cada ruta evaluar el costo (sumando los costos de cada tramo), y buscar la ruta (o una de las rutas) de menor costo.

De ahora en adelante, cuando se hable del mejor (camino, procedimiento, política, ...) se entenderá que es el mejor, en el sentido estricto cuando hay uno solo, o uno de los mejores cuando hay varios.

0.1.3 Solución por programación dinámica

La forma recurrente de resolver este problema es muy sencilla. Para conocer la mejor ruta de A hasta Z basta con conocer la mejor ruta a cada una de las ciudades de R_{n-1}. Al costo de cada ruta óptima hasta una de ciudad de R_{n-1} se le agrega el costo del tramo entre esa ciudad de R_{n-1} y Z en R_n y finalmente se escoge la menor suma. Definir algunas funciones permite escribir el razonamiento anterior de manera más corta y precisa.

Sean :

$$\begin{aligned} C_n^*(Z) &: \text{ costo mínimo de todas las rutas desde } A \text{ hasta } Z. \\ C_{n-1}^*(i) &: \text{ costo mínimo de todas las rutas desde } A \text{ hasta la} \\ & \text{ ciudad } i \in R_{n-1}. \end{aligned}$$

Entonces la solución recurrente dice:

$$C_n^*(Z) = \min_{i \in R_{n-1}} \{C_{n-1}(i) + c(i, Z)\}.$$

Obviamente esto presupone que se conocen todos los valores $C_{n-1}^*(i)$, y entonces la pregunta inmediata es: *¿Cómo se calculan los valores* $C_{n-1}^*(i)$*?*

La respuesta es de nuevo recurrente: *Utilizando los costos de las rutas mínimas desde A hasta las ciudades de R_{n-2}.*

Sea :

$$C^*_{n-2}(i) : \text{ costo mínimo de todas las rutas desde } A \text{ hasta la ciudad } i \in R_{n-2}.$$

Entonces la solución recurrente dice:

$$C^*_{n-1}(j) = \min\{C_{n-2}(i) + c(i,j) : i \in \Gamma^-(j)\}, \quad j \in R_{n-1}.$$

Este proceso se repite hasta poder utilizar valores "inmediatos" o de muy fácil obtención. Para este problema de la autopista, puede ser

$$C^*_2(j) = c(A,j), \quad j \in R_2.$$

donde $C^*_2(j)$indica costo mínimo de todas las rutas (hay una sola) desde A hasta la ciudad $j \in R_2$.

La deducción de la solución recurrente se hizo hacia atrás (desde n hasta 2) pero el cálculo se hace hacia adelante (de 2 hasta n). En resumen,

- definir una función que permita la recurrencia,
- definir el objetivo final,
- definir las condiciones iniciales (fáciles de evaluar),
- definir una relación o fórmula recurrente,
- calcular los valores iniciales,
- hacer cálculos recurrentes hasta encontrar la solución

Para este problema :

$$\begin{aligned}
C^*_k(i) &= \text{costo mínimo de todas las rutas desde } A \text{ hasta la} \\
&\quad\ \text{ciudad } i \in R_k, \ \ k = 2, ..., n. \\
C^*_n(Z) &= \ ? \\
C^*_2(j) &= c(A,j), \quad j \in R_2 \\
C^*_{k+1}(j) &= \min\{C^*_k(i) + c(i,j) : i \in \Gamma^-(j)\}, \ \ 2 \le k \le n-1, \ \ j \in R_{k+1}
\end{aligned}$$

Un planteamiento ligeramente diferente podría ser:

$$
\begin{aligned}
C_k^*(i) &= \text{costo mínimo de todas las rutas desde } A \text{ hasta la} \\
& \quad \text{ciudad } i \in R_k, \ \ k = 2, ..., n. \\
C_n^*(Z) &= \ ? \\
C_1^*(A) &= 0 \\
C_{k+1}^*(j) &= \min\{C_k^*(i) + c(i,j) : i \in \Gamma^-(j)\}, \ \ 1 \le k \le n-1, \ \ j \in R_{k+1}
\end{aligned}
$$

La diferencia está simplemente en el "sitio inicial".

0.1.4 Resultados numéricos

Los valores iniciales se obtienen inmediatamente:

$$
\begin{aligned}
C_2^*(2) &= c_{A2} = 4, \\
C_2^*(3) &= c_{A3} = 5.
\end{aligned}
$$

El proceso recurrente empieza realmente a partir de las ciudades de R_3:

$$
\begin{aligned}
C_3^*(4) &= \min_{i \in \Gamma^-(4)} \{C_2^*(i) + c_{i4}\}, \\
&= \min\{C_2^*(2) + c_{24}\}, \\
&= \min\{4 + 11\}, \\
C_3^*(4) &= 15.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C_3^*(5) &= \min_{i \in \Gamma^-(5)} \{C_2^*(i) + c_{i5}\}, \\
&= \min\{C_2^*(2) + c_{25}, C_2^*(3) + c_{35}\}, \\
&= \min\{4 + 10, 5 + 12\}, \\
C_3^*(5) &= 14.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C_3^*(6) &= \min_{i \in \Gamma^-(6)} \{C_2^*(i) + c_{i6}\}, \\
&= \min\{C_2^*(2) + c_{26}, C_2^*(3) + c_{36}\}, \\
&= \min\{4 + 9, 5 + 8\}, \\
C_3^*(6) &= 13.
\end{aligned}
$$

En resumen para la región R_3:

$$\begin{aligned}C_3^*(4) &= 15,\\ C_3^*(5) &= 14,\\ C_3^*(6) &= 13.\end{aligned}$$

Para la región R_4:

$$\begin{aligned}C_4^*(7) &= \min_{i\in\Gamma^-(7)}\{C_3^*(i)+c_{i7}\},\\ &= \min\{C_3^*(4)+c_{47}, C_3^*(5)+c_{57}, C_3^*(6)+c_{67}\},\\ &= \min\{15+1, 14+2, 13+6\},\\ C_4^*(7) &= 16.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}C_4^*(8) &= \min_{i\in\Gamma^-(8)}\{C_3^*(i)+c_{i8},\}\\ &= \min\{C_3^*(5)+c_{58}, C_3^*(6)+c_{68}\},\\ &= \min\{14+3, 13+4\},\\ C_4^*(8) &= 17.\end{aligned}$$

En resumen para la región R_4:

$$\begin{aligned}C_4^*(7) &= 16,\\ C_4^*(8) &= 17.\end{aligned}$$

Finalmente para Z en R_5:

$$\begin{aligned}C_5^*(Z) &= \min_{i\in\Gamma^-(Z)}\{C_4^*(i)+c_{iZ}\},\\ &= \min\{C_4^*(7)+c_{7Z}, C_4^*(8)+c_{8Z}\},\\ &= \min\{16+5, 17+8\},\\ C_5^*(Z) &= 21.\end{aligned}$$

Ya se obtuvo el costo mínimo, pero es necesario conocer también las ciudades por donde debe pasar una autopista de costo mínimo. Con la información que se tiene no se puede reconstruir la mejor ruta. Entonces es necesario volver a resolver el problema, pero esta vez es necesario, para cada ciudad intermedia j, no solo conocer $C_k^*(j)$, sino también saber desde que ciudad i^* de la región R_{k-1} se obtiene este costo mínimo.

Obviamente

$$
\begin{aligned}
C_2^*(2) &= 4, \;\; i^* = A, \\
C_2^*(3) &= 5, \;\; i^* = A.
\end{aligned}
$$

$C_3^*(4)$ se obtiene viniendo de la única ciudad predecesora: 2.

$$
C_3^*(4) = 15, \;\; i^* = 2.
$$

$$
\begin{aligned}
C_3^*(5) &= \min\{C_2^*(2) + c_{25}, C_2^*(3) + c_{35}\}, \\
&= \min\{\overline{4+10}, 5+12\}, \\
C_3^*(5) &= 14, \;\; i^* = 2.
\end{aligned}
$$

Para $C_3^*(7)$ hay empate ya que se obtiene el costo mínimo viniendo de 2 o viniendo de 3, sin embargo basta con tener información sobre una de las mejores ciudades precedentes, por ejemplo, la primera encontrada.

$$
\begin{aligned}
C_3^*(6) &= \min\{C_2^*(2) + c_{26}, C_2^*(3) + c_{36}\}, \\
&= \min\{\overline{4+9}, \overline{5+8}\}, \\
C_3^*(6) &= 13, \;\; i^* = 2.
\end{aligned}
$$

Toda la información necesaria para poder calcular el costo mínimo desde A hasta Z y poder reconstruir una ruta mínima es:

j	$C_2^*(j)$	i^*	j	$C_3^*(j)$	i^*	j	$C_4^*(j)$	i^*	j	$C_5^*(j)$	i^*
2	4	A	4	15	2	7	16	4	Z	21	7
3	5	A	5	14	2	8	17	5			
			6	13	2						

Luego según la tabla, el costo mínimo es 21. Además a Z se llega proveniente de 7, a 7 se llega proveniente de 4, a 4 se llega proveniente de 2, y finalmente a 2 se llega proveniente de A. Entonces la autopista de costo mínimo (o una de las autopistas de costo mínimo) es: $(A, 2, 4, 7, Z)$

0.1.5 Solución hacia atrás

La solución presentada en los dos numerales anteriores se conoce como la solución **hacia adelante**. También se tiene una solución análoga hacia atrás. Se busca el costo mínimo desde cada ciudad hasta Z empezando con el costo desde las ciudades en la región R_{n-1}.

$$
\begin{aligned}
C_k^*(i) = {} & \text{costo mínimo de todas las rutas desde la ciudad } i \in R_k \\
& \text{hasta } Z,\ k = n-1, n-2, ..., 1.
\end{aligned}
$$

Objetivo final:

$$C_1^*(A) = \ ?$$

Condiciones iniciales:

$$C_{n-1}^*(j) = c(j, Z), \ \ j \in R_{n-1}.$$

Relación recurrente:

$$C_{k-1}^*(i) = \min_{j \in \Gamma^+(i)} \{c(i,j) + C_k^*(j)\}, \ \ n-1 \geq k \geq 2, \ \ i \in R_{k-1}.$$

Obviamente

$$
\begin{aligned}
C_4^*(7) &= 5, \ \ j^* = Z, \\
C_4^*(8) &= 8, \ \ j^* = Z.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C_3^*(4) &= \min_{j \in \Gamma^+(4)} \{c(4,j) + C_4^*(j)\}, \\
&= \min\{c(4,7) + C_4^*(7)\}, \\
&= \min\{\overline{1+5}\}, \\
C_3^*(4) &= 6, \ \ j^* = 7.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C_3^*(5) &= \min_{j \in \Gamma^+(5)} \{c(5,j) + C_4^*(j)\}, \\
&= \min\{c(5,7) + C_4^*(7), c(5,8) + C_4^*(8)\}, \\
&= \min\{\overline{2+5}, 3+8\}, \\
C_3^*(5) &= 7, \ \ j^* = 7.
\end{aligned}
$$

y así sucesivamente.

i	$C_4^*(i)$	j^*	i	$C_3^*(i)$	j^*	i	$C_2^*(i)$	j^*	i	$C_1^*(i)$	j^*
7	5	Z	4	6	7	2	17	4	A	21	2
8	8	Z	5	7	7	3	19	5			
			6	11	7						

Luego según la tabla, el costo mínimo es 21. Además se llega desde A pasando por 2, se llega desde 2 pasando por 4, se llega desde 4 pasando por 7, y finalmente se llega desde 7 pasando por Z. Entonces la autopista de costo mínimo (o una de las autopistas de costo mínimo) es: $(A, 2, 4, 7, Z)$

0.2 EL PROBLEMA DE ASIGNACIÓN DE MÉDICOS

0.2.1 Enunciado del problema

(Adaptación de un ejemplo de Hillier y Lieberman). La OMS (Organización Mundial de la Salud) tiene un equipo de m médicos especialistas en salud pública y los desea repartir en n paises P_1, P_2, ..., P_n para que desarrollen campañas educativas tendientes a disminuir la mortalidad infantil. De acuerdo con las condiciones específicas de cada país, de la tasa de natalidad, de la mortalidad antes de los dos años, del número de habitantes, la OMS posee evaluaciones bastante precisas de los valores $b(i,j) \equiv b_{ij}$, $i = 0, ..., m$, $j = 1, ..., n$ que indican el beneficio de asignar i médicos al país P_j. Este beneficio b_{ij} indica (en cientos de mil) la disminución en el número de niños muertos antes de los dos años de vida, durante los próximos 5 años. Así por ejemplo, $b_{23} = 6$ indica que si se asignan 2 médicos al país P_3 se espera que en los próximos 5 años haya una disminución de 600000 en el número de niños muertos antes de los dos años de vida.

Los beneficios no son directamente proporcionales al número de médicos, es decir, si $b_{23} = 6$ no se cumple necesariamente que $b_{43} = 12$.

Se supone además que no es obligatorio asignar médicos en cada uno de los paises y también se supone que es posible asignar todos los médicos a un solo país.

También se supone que al aumentar el número de médicos asignados a un país el beneficio no disminuye. Pensando en un problema más general se podría pensar que cuando hay demasiadas personas asignadas a una labor, se obstruye el adecuado funcionamiento y el resultado global podría disminuir. Sin embargo se puede suponer que b_{ij} indica el mayor beneficio obtenido en el país P_j al asignar a los más i médicos.

La OMS desea saber cuantos médicos debe asignar a cada país para maximizar el beneficio total, o sea, para maximizar la disminución total en la mortalidad infantil en los n paises.

0.2.2 Planteamiento del problema de optimización

Se necesita conocer el número de médicos que se asigna a cada país para maximizar el beneficio total, sin sobrepasar el número de médicos disponibles. Si x_j indica el número de médicos que se asignan al pais P_j, entonces el problema de optimización es:

$$\begin{aligned} \max \sum_{j=1}^{n} b(x_j, j) & \\ \sum_{j=1}^{n} x_j &\leq m, \\ 0 \leq x_j &\leq m, \;\; j = 1, ..., n, \\ x_j &\in \mathbb{Z}, \;\; j = 1, ..., n. \end{aligned}$$

Este problema se puede resolver por la fuerza bruta construyendo todas las combinaciones, verificando si cada combinación es factible ($\sum_{j=1}^{n} x_j \leq m$) y escogiendo la mejor entre las factibles. De esta forma cada variable puede tomar $m+1$ valores: 0, 1, 2, ..., m, o sea, es necesario estudiar $(m+1)^n$ combinaciones. Es claro que para valores grandes de m y n el número de combinaciones puede ser inmanejable.

0.2.3 Solución recurrente

Para asignar optimamente m médicos a los n paises hay que asignar una parte de los médicos a los paises P_1, P_2, ..., P_{n-1} y el resto al país P_n. Supongamos que sabemos asignar óptimamente 0, 1, 2, 3, ..., m médicos a los paises P_1, P_2, ..., P_{n-1}. Entonces para asignar óptimamente m médicos a los n paises hay que considerar $m+1$ posibilidades:

- 0 médicos a los paises P_1,..., P_{n-1} y m médicos a P_n
- 1 médico a los paises P_1,..., P_{n-1} y $m-1$ médicos a P_n
- 2 médicos a los paises P_1,..., P_{n-1} y $m-2$ médicos a P_n

  ...
- m médicos a los paises P_1,..., P_{n-1} y 0 médicos a P_n

Al escoger la mejor combinación se tiene la solución del problema. Obviamente para conocer las soluciones óptimas en los primeros $n-1$ paises se requiere conocer las soluciones óptimas en los primeros $n-2$ paises y así sucesivamente. O sea, primero se resuelve el problema de asignar óptimamente médicos al primer país, con estos resultados se puede obtener la asignación óptima de médicos a los 2 primeros paises, y así sucesivamente hasta obtener la solución global.

$$\begin{aligned} B_k^*(i) = {} & \text{beneficio máximo obtenido al asignar } i \text{ médicos} \\ & \text{a los paises } P_1,\ P_2,\ ...,\ P_k,\quad k = 1, ..., n,\ \ i = 0, ..., m. \end{aligned}$$

Objetivo final:

$$B_n^*(m) = \ ?$$

Condiciones iniciales:

$$B_1^*(i) = b_{i1},\ \ i = 0, ..., m.$$

Relación recurrente:

$$B_{k+1}^*(i) = \max_{0 \le j \le i} \{B_k^*(i-j) + b_{j,k+1}\},\quad k = 1, ..., n-1,\ \ i = 0, ..., m.$$

Esta relación recurrente dice que la mejor manera de asignar i médicos a los paises P_1, P_2, ..., P_{k+1} es estudiando todas las posibilidades consistentes en asignar j médicos al país P_{k+1} y el resto, $i-j$, a los paises P_1, P_2, ..., P_k.

0.2.4 Resultados numéricos

Consideremos los siguientes datos: $m = 5$, $n = 4$ y los siguientes beneficios:

i	b_{i1}	b_{i2}	b_{i3}	b_{i4}
0	0	0	0	0
1	2	2	1	4
2	4	3	4	5
3	6	4	7	6
4	8	8	9	7
5	10	12	11	8

Condiciones iniciales:

$$
\begin{aligned}
B_1^*(0) &= 0,\ \ j^* = 0,\\
B_1^*(1) &= 2,\ \ j^* = 1,\\
B_1^*(2) &= 4,\ \ j^* = 2,\\
B_1^*(3) &= 6,\ \ j^* = 3,\\
B_1^*(4) &= 8,\ \ j^* = 4,\\
B_1^*(5) &= 10,\ \ j^* = 5.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
B_2^*(0) &= \max_{0\le j\le 0}\{B_1^*(0-j)+b_{j2}\},\\
&= \max\{B_1^*(0)+b_{02}\},\\
&= \max\{0+0\},\\
B_2^*(0) &= 0,\ \ j^* = 0.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
B_2^*(1) &= \max_{0\le j\le 1}\{B_1^*(1-j)+b_{j2}\},\\
&= \max\{B_1^*(1)+b_{02}, B_1^*(0)+b_{12}\},\\
&= \max\{\overline{2+0}, 0+2\},\\
B_2^*(1) &= 2,\ \ j^* = 0.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
B_2^*(2) &= \max_{0\le j\le 2}\{B_1^*(2-j)+b_{j2}\},\\
&= \max\{B_1^*(2)+b_{02}, B_1^*(1)+b_{12}, B_1^*(0)+b_{22}\},\\
&= \max\{\overline{4+0}, 2+2, 0+3\},\\
B_2^*(2) &= 4,\ \ j^* = 0.
\end{aligned}
$$

Para los dos primeros paises se tiene:

$$
\begin{aligned}
B_2^*(0) &= 0,\ \ j^* = 0,\\
B_2^*(1) &= 2,\ \ j^* = 0,\\
B_2^*(2) &= 4,\ \ j^* = 0,\\
B_2^*(3) &= 6,\ \ j^* = 0,\\
B_2^*(4) &= 8,\ \ j^* = 0,\\
B_2^*(5) &= 12,\ \ j^* = 5.
\end{aligned}
$$

Un ejemplo de un cálculo para los tres primeros paises es:

$$
\begin{aligned}
B_3^*(4) &= \max_{0\le j\le 4}\{B_2^*(4-j)+b_{j3}\},\\
&= \max\{B_2^*(4)+b_{03}, B_2^*(3)+b_{13}, B_2^*(2)+b_{23},\\
&\qquad B_2^*(1)+b_{33}, B_2^*(0)+b_{43}\},\\
&= \max\{8+0, 6+1, 4+4, \overline{2+7}, 0+9\},\\
B_3^*(4) &= 9,\ \ j^*=3.
\end{aligned}
$$

En la siguiente tabla están los resultados importantes:

i	$B_1^*(i)$	j^*	$B_2^*(i)$	j^*	$B_3^*(i)$	j^*	$B_4^*(i)$	j^*
0	0	0	0	0	0	0		
1	2	1	2	0	2	0		
2	4	2	4	0	4	0		
3	6	3	6	0	7	3		
4	8	4	8	0	9	3		
5	10	5	12	5	12	0	13	1

Se observa que no es necesario calcular $B_4^*(0)$, $B_4^*(1)$, ..., $B_4^*(4)$, ya que no se utilizan para calcular $B_4^*(5)$. El beneficio máximo es 13. Este beneficio máximo se obtiene asignando 1 médico al cuarto país ($j^* = 1$). Entonces quedan 4 médicos para los primeros 3 paises. El j^* correspondiente a $B_3^*(4)$ es 3, esto indica que hay que asignar 3 médicos al tercer país. Entonces queda 1 médico para los primeros 2 paises. El j^* correspondiente a $B_2^*(1)$ es 0, esto indica que hay que asignar 0 médicos al segundo país. Entonces queda 1 médico para el primer país.

$$
\begin{aligned}
x_1^* &= 1,\\
x_2^* &= 0,\\
x_3^* &= 3,\\
x_4^* &= 1,\\
B_4^*(5) &= 13.
\end{aligned}
$$

0.2.5 Problema de asignación de médicos con cotas superiores

El planteamiento de este problema es una generalización del anterior, la única diferencia es que para cada país P_j hay una cota superior v_j para el número de médicos que se pueden asignar allí. Obviamente se debe cumplir que $v_j \le$

m. Para garantizar lo anterior, basta con considerar una nueva cota $v'_j = \min\{v_j, m\}$. Entonces los datos para este problema de médicos con cota superior son:

- m número de médicos
- n número de paises
- v_1, v_2, ..., v_n cotas superiores para el número de médicos en cada país
- para cada país P_j los valores de los beneficios $b_{ij} \equiv b(i, j)$: b_{0j}, b_{1j}, ..., $b_{v_j j}$

El planteamiento del problema de optimización es el siguiente: encontrar x_1, x_2, ..., x_n para maximizar el beneficio total con ciertas restricciones:

$$\begin{aligned} \max \sum_{j=1}^{n} b(x_j, j) & \\ \sum_{j=1}^{n} x_j &\le m \\ 0 \le x_j &\le v_j, \;\; j = 1, ..., n \\ x_j &\in \mathbb{Z}, \;\; j = 1, ..., n \end{aligned}$$

Antes de plantear la solución recurrente es necesario considerar lo siguiente: el número de médicos que se asignan al conjunto de paises P_1, P_2, ..., P_k, no puede ser superior a m y tampoco puede ser superior a la suma de sus cotas superiores. Para esto se introducen unos nuevos valores

$$V_k = \min\{m, \sum_{j=1}^{k} v_j\}, \;\; k = 1, ..., n.$$

$$\begin{aligned} B_k^*(i) = & \text{ beneficio máximo obtenido al asignar } i \text{ médicos} \\ & \text{a los paises } P_1, \; P_2, \; ..., \; P_k, \;\; k = 1, ..., n, \;\; i = 0, ..., V_k. \end{aligned}$$

Objetivo final:

$$B_n^*(m) = \; ?$$

Condiciones iniciales:

$$B_1^*(i) = b_{i1}, \;\; i = 0, ..., V_1.$$

Relación recurrente:

$$B_{k+1}^*(i) = \max_{\substack{0 \le i-j \le V_k \\ i-j \le i \\ 0 \le j \le v_{k+1} \\ j \le i}} \{B_k^*(i-j) + b_{j,k+1}\}, \quad k = 1, ..., n-1, \;\; i = 0, ..., V_{k+1}.$$

Los límites para la variación de $i - j$ y de j han sido presentados de la manera más natural y más segura posible, pero obviamente hay algunas redundancias y admiten simplificaciones.

$$\max\{i - V_k, 0\} \le j \le \min\{i, v_k\}$$

Consideremos los siguientes datos: $m = 5$, $n = 4$, $v_j : 3, 4, 2, 3$ y los siguientes beneficios:

i	b_{i1}	b_{i2}	b_{i3}	b_{i4}
0	0	0	0	0
1	2	2	1	4
2	4	3	4	5
3	6	4	7	6
4		8		

Entonces

$$V_1 = 3, \;\; V_2 = 5, \;\; V_3 = 5, \;\; V_4 = 5.$$

Condiciones iniciales:

$$\begin{aligned} B_1^*(0) &= 0, \;\; j^* = 0, \\ B_1^*(1) &= 2, \;\; j^* = 1, \\ B_1^*(2) &= 4, \;\; j^* = 2, \\ B_1^*(3) &= 6, \;\; j^* = 3. \end{aligned}$$

$\vdots$

$$
\begin{aligned}
B_2^*(2) &= \max_{0\le j\le 2}\{B_1^*(2-j)+b_{j2}\}\\
&= \max\{B_1^*(2)+b_{02}, B_1^*(1)+b_{12}, B_1^*(0)+b_{22}\}\\
&= \max\{\overline{4+0}, 2+2, 0+3\}\\
B_2^*(2) &= 4,\ \ j^*=0.
\end{aligned}
$$

$\vdots$

$$
\begin{aligned}
B_2^*(5) &= \max_{2\le j\le 4}\{B_1^*(5-j)+b_{j2}\}\\
&= \max\{B_1^*(3)+b_{22}, B_1^*(2)+b_{32}, B_1^*(1)+b_{42}\}\\
&= \max\{6+3, 4+4, \overline{2+8}\}\\
B_2^*(5) &= 10,\ \ j^*=4.
\end{aligned}
$$

$\vdots$

i	$B_1^*(i)$	j^*	$B_2^*(i)$	j^*	$B_3^*(i)$	j^*	$B_4^*(i)$	j^*
0	0	0	0	0	0	0		
1	2	1	2	0	2	0		
2	4	2	4	0	4	0		
3	6	3	6	0	6	0		
4			8	1	8	0		
5			10	4	10	0	12	1

El beneficio máximo es 12. Este beneficio máximo se obtiene asignando 1 médico al cuarto país ($j^*=1$). Entonces quedan 4 médicos para los primeros 3 paises. El j^* correspondiente a $B_3^*(4)$ es 0, esto indica que hay que asignar 0 médicos al tercer país. Entonces quedan 4 médicos para los primeros 2 paises. El j^* correspondiente a $B_2^*(4)$ es 1, esto indica que hay que asignar 1 médico al segundo país. Entonces quedan 3 médicos para el primer país.

$$
\begin{aligned}
x_1^* &= 3\\
x_2^* &= 1\\
x_3^* &= 0\\
x_4^* &= 1\\
B_4^*(5) &= 12
\end{aligned}
$$

0.2.6 Problema de asignación de médicos con cotas inferiores y superiores

El planteamiento de este problema es una generalización del anterior, ahora para cada país P_j hay una cota inferior u_j y una cota superior v_j para el número de médicos que se pueden asignar allí. Obviamente se debe cumplir que $0 \leq u_j < v_j \leq m$.

Los datos para este problema son:

- m número de médicos,
- n número de paises,
- u_1, ..., u_n cotas inferiores para el número de médicos,
- v_1, ..., v_n cotas superiores para el número de médicos,
- para cada país P_j los valores de los beneficios $b_{ij} \equiv b(i,j)$: $b_{u_j j}$, $b_{u_j+1,j}$, ..., $b_{v_j j}$.

Para que no haya información redundante, los datos deben cumplir la siguiente propiedad: la cota superior para el número de médicos en el país P_j debe permitir asignar el número mínimo de médicos en los otros paises, es decir:

$$v_j \leq m - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} u_i.$$

En caso contrario

$$v'_j = \min\{v_j, m - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} u_i\}.$$

El problema tiene solución si y solamente si el número total de médicos disponibles alcanza para cumplir con las cotas inferiores:

$$\sum_{j=1}^{n} u_j \leq m.$$

El planteamiento del problema de optimización es el siguiente: encontrar x_1, x_2, ..., x_n para maximizar el beneficio total con ciertas restricciones:

$$\max \sum_{j=1}^{n} b(x_j, j)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \leq m,$$

$$u_j \leq x_j \leq v_j, \;\; j = 1, ..., n,$$

$$x_j \in \mathbb{Z}, \;\; j = 1, ..., n.$$

Antes de plantear la solución recurrente es necesario considerar lo siguiente: el número de médicos que se asignan al conjunto de paises P_1, P_2, ..., P_k, no puede ser inferior a la suma de sus cotas inferiores. Por otro lado, no puede ser superior a m, tampoco puede ser superior a la suma de sus cotas superiores y debe permitir satisfacer las cotas mínimas para el resto de paises, es decir, para los paises P_{k+1}, P_{k+2}, ..., P_n. Para esto se introducen unos nuevos valores

$$U_k = \sum_{j=1}^{k} u_j \qquad\qquad\qquad , \;\; k = 1, ..., n$$

$$V_k = \min\{m, \; \sum_{j=1}^{k} v_j, \;\; m - \sum_{j=k+1}^{n} u_j\}, \;\; k = 1, ..., n$$

$$V_k = \min\{\sum_{j=1}^{k} v_j, \;\; m - \sum_{j=k+1}^{n} u_j\}$$

Aquí se sobreentiende que el valor de una sumatoria es cero, cuando el límite inferior es más grande que el límite superior, por ejemplo,

$$\sum_{i=4}^{2} a_i = 0.$$

$$B_k^*(i) = \text{beneficio máximo obtenido al asignar } i \text{ médicos}$$
$$\text{a los paises } P_1, \; P_2, \; ..., \; P_k, \;\; k = 1, ..., n, \;\; i = U_k, ..., V_k.$$

Objetivo final:

$$B_n^*(m) = \; ?$$

Condiciones iniciales:

$$B_1^*(i) = b_{i1}, \quad i = U_1, ..., V_1.$$

Relación recurrente:

$$B_{k+1}^*(i) = \max_{\substack{U_k \le i-j \le V_k \\ i-j \le i \\ u_{k+1} \le j \le v_{k+1} \\ j \le i}} \{B_k^*(i-j) + b_{j,k+1}\}, \quad k = 1, ..., n-1, \quad i = U_{k+1}, ..., V_{k+1}.$$

En resumen, la variación de j en la relación recurrente está dada por:

$$\max\{i - V_k, u_{k+1}\} \le j \le \min\{i - U_k, v_{k+1}\}.$$

Consideremos los siguientes datos: $m = 5$, $n = 4$, $u_j : 0, 0, 1, 2$, $v_j : 3, 4, 2, 3$ y los siguientes beneficios:

i	b_{i1}	b_{i2}	b_{i3}	b_{i4}
0	0	0		
1	2	2	1	
2	4	3	4	5
3	6	4		6
4		8		

Si se considera el segundo país, para los demás paises en total se necesitan por lo menos 0+1+2=3 médicos, luego en el segundo país no se pueden asignar más de $5 - 3 = 2$ médicos, entonces los valores $b_{32} = 4$ y $b_{42} = 8$ nunca se van a utilizar. En realidad los datos con los cuales se va a trabajar son:

$$u_j : 0, 0, 1, 2, \quad v_j : 2, 2, 2, 3.$$

i	b_{i1}	b_{i2}	b_{i3}	b_{i4}
0	0	0		
1	2	2	1	
2	4	3	4	5
3				6

$$
\begin{aligned}
U_1 &= 0, \;\; V_1 = \min\{2, 5-3\} = 2, \\
U_2 &= 0, \;\; V_2 = \min\{4, 5-3\} = 2, \\
U_3 &= 1, \;\; V_3 = \min\{6, 5-2\} = 3, \\
U_4 &= 3, \;\; V_4 = \min\{9, 5-0\} = 5.
\end{aligned}
$$

Condiciones iniciales:

$$
\begin{aligned}
B_1^*(0) &= 0, \;\; j^* = 0, \\
B_1^*(1) &= 2, \;\; j^* = 1, \\
B_1^*(2) &= 4, \;\; j^* = 2.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
B_2^*(1) &= \max_{0 \le j \le 1} \{B_1^*(1-j) + b_{j2}\} \\
&= \max\{B_1^*(1) + b_{02}, B_1^*(0) + b_{12}\} \\
&= \max\{\overline{2+0}, 0+2\} \\
B_2^*(1) &= 2, \;\; j^* = 0.
\end{aligned}
$$

$\vdots$

$$
\begin{aligned}
B_3^*(3) &= \max_{1 \le j \le 2} \{B_2^*(3-j) + b_{j3}\} \\
&= \max\{B_2^*(2) + b_{13}, B_2^*(1) + b_{23}\} \\
&= \max\{4+1, \overline{2+4}\} \\
B_3^*(3) &= 6, \;\; j^* = 2.
\end{aligned}
$$

$\vdots$

i	$B_1^*(i)$	j^*	$B_2^*(i)$	j^*	$B_3^*(i)$	j^*	$B_4^*(i)$	j^*
0	0	0	0	0				
1	2	1	2	0	1	1		
2	4	2	4	0	4	2		
3					6	2		
4								
5							11	2

El beneficio máximo es 11. Este beneficio máximo se obtiene asignando 2 médicos al cuarto país ($j^* = 2$). Entonces quedan 3 médicos para los primeros 3 paises. El j^* correspondiente a $B_3^*(3)$ es 2, esto indica que hay que asignar 2 médicos al tercer país. Entonces queda 1 médico para los primeros 2 paises. El j^* correspondiente a $B_2^*(1)$ es 0, esto indica que hay que asignar 0 médicos al segundo país. Entonces queda 1 médico para el primer país.

$$
\begin{aligned}
x_1^* &= 1,\\
x_2^* &= 0,\\
x_3^* &= 2,\\
x_4^* &= 2,\\
B_4^*(5) &= 11.
\end{aligned}
$$

El problema anterior también se puede resolver como un problema con cotas superiores (sin cotas inferiores) considerando unicamente los datos por encima de lo exigido por las cotas mínimimas, es decir, de los m médicos disponibles en realidad hay únicamente

$$m' = m - \sum_{i=1}^{n} u_i$$

médicos para distribuir, pues de todas formas hay que asignar $\sum_{i=1}^{n} u_i$ para satisfacer las cotas mínimas.

La cota máxima para el número de médicos adicionales en el país P_j es naturalmente

$$v_j' = v_j - u_j, \;\; j = 1, ..., n.$$

De manera análoga se puede pensar en un beneficio b_{ij}' correspondiente al beneficio adicional al asignar i médicos, por encima de de la cota mínima u_j en el país P_j

$$b_{ij}' = b(i + u_j, j) - b(u_j, j), \;\;\; 1 \le j \le n, \;\; 0 \le i \le v_j'.$$

Al aplicar estos cambios a los datos del problema se tiene:

$$m' = 5 - 3 = 2, \;\;\; n = 4, \;\;\; v_j' : 2, 2, 1, 1.$$

i	b_{i1}'	b_{i2}'	b_{i3}'	b_{i4}'
0	0	0	0	0
1	2	2	3	1
2	4	3		

La solución de este problema modificado es:

$$
\begin{aligned}
x_1^{*'} &= 1,\\
x_2^{*'} &= 0,\\
x_3^{*'} &= 1,\\
x_4^{*'} &= 0,\\
B_4^{*'}(2) &= 5.
\end{aligned}
$$

Entonces

$$
\begin{aligned}
x_1^* &= 1 + u_1 = 1 + 0 = 1,\\
x_2^* &= 0 + u_2 = 0 + 0 = 0,\\
x_3^* &= 1 + u_3 = 1 + 1 = 2,\\
x_4^* &= 0 + u_4 = 0 + 2 = 2,\\
B_4^*(5) &= 5 + \sum_{i=1}^{n} b(u_i, i) = 5 + 6 = 11.
\end{aligned}
$$

Como observación final sobre **estos** datos numéricos, se puede ver que para cada uno de los tres problemas hay varias soluciones, en particular para este último problema hay otra solución:

$$
\begin{aligned}
x_1^* &= 0,\\
x_2^* &= 1,\\
x_3^* &= 2,\\
x_4^* &= 2,\\
B_4^*(5) &= 11.
\end{aligned}
$$

0.3 EL PROBLEMA DEL MORRAL (KNAPSACK)

0.3.1 Enunciado del problema

Un montañista está planeando una excursión muy especial. Evaluando la capacidad de su morral, la dificultad de la excursión, algunos implementos indispensables y sus fuerzas, cree que tiene en su morral una capacidad de $C \in \mathbb{Z}$

kilos (u otra unidad de peso, o de manera más precisa, de masa) disponibles para alimentos. De acuerdo con su experiencia, sus necesidades y sus gustos ha escogido n tipos de alimentos A_1, A_2, ..., A_n, todos más o menos equilibrados. Estos alimentos vienen en paquetes indivisibles (por ejemplo en lata) y $p_i \in \mathbb{Z}$ indica el peso de cada paquete del alimento A_i. Teniendo en cuenta la composición de cada alimento, las calorías, las vitaminas, los minerales, el sabor, el contenido de agua, etc., el montañista asignó a cada paquete del alimento A_i un beneficio global b_i.

El montañista desea saber la cantidad de paquetes de cada alimento que debe llevar en su morral, de tal manera que maximice su beneficio, sin sobrepasar la capacidad destinada para alimentos.

En este problema se supone que no es obligación llevar paquetes de cada uno de los alimentos. También se supone que no hay cotas inferiores ni superiores para el número de paquetes de cada alimento.

Tal vez ningún montañista ha tratado de resolver este problema para organizar su morral, seguramente ni siquiera ha tratado de plantearlo. Lo que si es cierto es que hay muchos problemas, de gran tamaño y de mucha importancia, que tienen una estructura análoga. Hay libros y muchos artículos sobre este problema.

0.3.2 Planteamiento del problema de optimización

Si x_j indica el número de paquetes del alimento A_j que el montañista debe llevar en su morral, entonces se debe maximizar el beneficio, bajo ciertas restricciones:

$$
\begin{aligned}
\max \sum_{j=1}^{n} b_j x_j & \\
\sum_{j=1}^{n} p_j x_j \le C. & \\
x_j \in \mathbb{Z},\ \ j = 1, ..., n. &
\end{aligned}
$$

Este problema se puede resolver por la fuerza bruta construyendo todas las combinaciones, haciendo variar x_j entre 0 y $\lfloor C/p_j \rfloor$, verificando si cada combinación es factible ($\sum_{j=1}^{n} p_j x_j \le C$) y escogiendo la mejor entre las factibles. El significado de $\lfloor\, t\, \rfloor$ es simplemente la parte entera inferior, o parte entera usual, es decir, el mayor entero menor o igual a t. Es claro que para valores grandes de n el número de combinaciones puede ser inmanejable.

La función objetivo (la función que hay que maximizar) es lineal, la restricción también es lineal, las variables deben ser enteras y se puede suponer que los coeficientes b_j y p_j también son enteros. Entonces este problema también se puede resolver por métodos de programación entera (programación lineal con variables enteras).

0.3.3 Solución recurrente

Para conocer optimamente el número de paquetes de cada uno de los n alimentos, se divide el morral con capacidad $i = C$ en dos "submorrales", uno con capacidad j utilizado únicamente para el alimento A_n y otro submorral con capacidad $i - j$ utilizado para los alimentos A_1, A_2,, ..., A_{n-1}. Si se conoce la solución optima de un morral con capacidad $c = 0, ..., C$ para los alimentos A_1, A_2,, ..., A_{n-1} entonces basta con estudiar todas las posibilidades de variación de j y escoger la mejor para obtener la respuesta global. Las posibles combinaciones son:

- C kilos para A_1,...,A_{n-1}, 0 kilos para A_n
- $C - 1$ kilos para A_1,...,A_{n-1}, 1 kilo para A_n

  $\vdots$
- 0 kilos para A_1,...,A_{n-1}, C kilos para A_n

El razonamiento anterior se puede aplicar para los primeros $n-1$ alimentos con un morral de i kilos de capacidad, y así sucesivamente. Precisando más:

$$\begin{aligned} B_k^*(i) = {} & \text{beneficio máximo utilizando los primeros } k \text{ alimentos en un} \\ & \text{morral con capacidad de } i \text{ kilos, } 1 \le k \le n,\ 0 \le i \le C. \end{aligned}$$

Objetivo final:

$$B_n^*(C) = \ ?$$

Condiciones iniciales:

$$B_1^*(i) = b_1 \left\lfloor \frac{i}{p_1} \right\rfloor, \ \ 0 \le i \le C$$

Relación recurrente:

$$B_{k+1}^*(i) = \max_{0 \le j \le i} \left\{ B_k^*(i-j) + b_{k+1} \left\lfloor \frac{j}{p_{k+1}} \right\rfloor \right\}, \ \ 1 \le k \le n-1, \ \ 0 \le i \le C.$$

Esta relación recurrente dice que la mejor manera de conocer el número de paquetes de los alimentos A_1, A_2, ..., A_{k+1} en un morral con una capacidad de i kilos es estudiando todas las posibilidades consistentes en dejar j kilos para el alimento A_{k+1} y el resto, $i - j$ kilos, para los alimentos A_1, A_2, ..., A_k.

0.3.4 Resultados numéricos

Consideremos los siguientes datos: $C = 11,\ n = 4,\quad p_i : 4,\ 3,\ 2,\ 5,\quad b_i :$ $14, 10, 6, 17.8$.

$$
\begin{aligned}
B_1^*(0) &= 0,\ \ j^* = 0,\\
B_1^*(1) &= 0,\ \ j^* = 1,\\
B_1^*(2) &= 0,\ \ j^* = 2,\\
B_1^*(3) &= 0,\ \ j^* = 3,\\
B_1^*(4) &= 14,\ \ j^* = 4,\\
B_1^*(5) &= 14,\ \ j^* = 5,\\
B_1^*(6) &= 14,\ \ j^* = 6,\\
B_1^*(7) &= 14,\ \ j^* = 7,\\
B_1^*(8) &= 28,\ \ j^* = 8,\\
B_1^*(9) &= 28,\ \ j^* = 9,\\
B_1^*(10) &= 28,\ \ j^* = 10,\\
B_1^*(11) &= 28,\ \ j^* = 11.
\end{aligned}
$$

$\vdots$

$$
\begin{aligned}
B_2^*(3) &= \max_{1\le j\le 3} \left\{ B_1^*(3-j) + b_2 \left\lfloor \frac{j}{p_2} \right\rfloor \right\},\\
&= \max_{1\le j\le 3} \left\{ B_1^*(3-j) + 10 \left\lfloor \frac{j}{3} \right\rfloor \right\},\\
&= \max\{0+0, 0+0, 0+0, \overline{0+10}\},\\
B_2^*(3) &= 10,\quad j^* = 3.
\end{aligned}
$$

En la tabla está el resumen de los resultados. El beneficio máximo es 38. Este beneficio máximo se obtiene asignando 0 kilos al cuarto alimento ($j^* = 0$). Entonces quedan 11 kilos para los primeros 3 alimentos. El j^* correspondiente a $B_3^*(11)$ es 0, esto indica que hay que asignar 0 kilos al tercer alimento. Entonces quedan 11 kilos para los primeros 2 alimentos. El j^* correspondiente a $B_2^*(11)$ es 3, esto indica que hay que asignar 3 kilos al segundo alimento, o sea, 1 paquete del segundo alimento. Entonces quedan 8 kilos para el primer alimento, o sea, 2 paquetes.

i	$B_1^*(i)$	j^*	$B_2^*(i)$	j^*	$B_3^*(i)$	j^*	$B_4^*(i)$	j^*
0	0	0	0	0	0	0		
1	0	1	0	0	0	0		
2	0	2	0	0	6	2		
3	0	3	10	3	10	0		
4	14	4	14	0	14	0		
5	14	5	14	0	16	2		
6	14	6	20	6	20	0		
7	14	7	24	3	24	0		
8	28	8	28	0	28	0		
9	28	9	30	9	30	0		
10	28	10	34	6	34	0		
11	28	11	38	3	38	0	38	0

$$\begin{aligned}
x_1^* &= 2,\\
x_2^* &= 1,\\
x_3^* &= 0,\\
x_4^* &= 0,\\
B_4^*(11) &= 38.
\end{aligned}$$

Uno podría pensar que una manera simple de resolver este problema es buscar el alimento con mayor beneficio por kilo, y asignar la mayor cantidad posible de este alimento. Para los datos anteriores los beneficios por kilo son: 3.5, 3.33, 3 y 3.56 . Entonces se deberían llevar dos paquetes del cuarto alimento para un beneficio de 35.6 . Es claro que esta no es la mejor solución.

El problema del morral se puede convertir en uno análogo al problema de los médicos, introduciendo b_{ij} el beneficio obtenido con i kilos dedicados al alimento A_j

$$b_{ij} = b_j \left\lfloor \frac{i}{p_j} \right\rfloor$$

Para los datos anteriores se tendría la tabla

i	b_{i1}	b_{i2}	b_{i3}	b_{i4}
0	0	0	0	0
1	0	0	0	0
2	0	0	6	0
3	0	10	6	0
4	14	10	12	0
5	14	10	12	17.8
6	14	20	18	17.8
7	14	20	18	17.8
8	28	20	24	17.8
9	28	30	24	17.8
10	28	30	30	35.6
11	28	30	30	35.6

y la solución óptima

$$\begin{aligned} x_1^{*'} &= 8, \\ x_2^{*'} &= 3, \\ x_3^{*'} &= 0, \\ x_4^{*'} &= 0, \\ B_4^*(11) &= 38. \end{aligned}$$

Es conveniente recordar que x_i' indica el número de kilos dedicados al producto i, luego $x_1 = 2,\ \ x_2 = 1,\ \ x_3 = 0,\ \ x_4 = 0,\ \ B_4^*(11) = 38.$

Este paso por el problema de los médicos, presenta un inconveniente cuando C tiene un valor grande: es necesario construir una tabla muy grande de datos (los beneficios), cuando en realidad el conjunto de datos es pequeño: n, C, los p_i, los b_i.

El problema del morral también se puede generalizar al caso con cotas inferiores y superiores para el número de paquetes de cada alimento.

0.4 PROBLEMA DE UN SISTEMA ELÉCTRICO

0.4.1 Enunciado del problema

Un sistema eléctrico está compuesto por n partes. Para que el sistema funcione se requiere que cada parte funcione. En cada parte hay que colocar por lo menos una unidad, pero se pueden colocar varias unidades para aumentar la probabilidad de que esa parte funcione. La probabilidad de que todo el sistema funcione es igual al producto de las probabilidades de que cada parte funcione. Los datos del problema son:

- n : número de partes
- v_i : número máximo de unidades que se pueden colocar en la parte i, $1 \leq i \leq n$
- $p_{ij} \equiv p(i,j)$: probabilidad de que la parte i funcione si se colocan j unidades, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq v_i$
- $c_{ij} \equiv c(i,j)$: costo de colocar j unidades en la parte i del sistema, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq v_i$
- $C \in \mathbb{Z}$: cantidad disponible para la construcción del sistema eléctrico

Se desea conocer el número de unidades que hay que colocar en cada parte de manera que se maximice la probabilidad de que todo el sistema funcione si se dispone de un capital de C pesos para la fabricación.

Se supone, lo cual es totalmente acorde con la realidad, que p_{ij}, c_{ij} son crecientes con respecto a j, es decir, si el número de unidades aumenta entonces ni el costo ni la probabilidad pueden disminuir, o sea, $p_{ij} \leq p_{i,j+1}$, $c_{ij} \leq c_{i,j+1}$ para $1 \leq j \leq v_i - 1$. También se supone que $1 \leq v_i$. Además el dinero disponible C debe alcanzar para colocar en cada parte el número máximo de unidades posible, o sea, $c(i, v_i) \leq C$ Si esto no es así, se puede modificar el valor v_i de la siguiente manera:

$$v'_i = j_i \quad \text{donde} \quad c(i, j_i) = \max_{1 \leq j \leq v_i} \{c_{ij} \mid c_{ij} \leq C\}.$$

Además se debería cumplir

$$c(i, v_i) \leq C - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} c(j, 1), \ \ \forall i.$$

El problema tiene solución si y solamente si

$$\sum_{i=1}^{n} c_{i1} \leq C$$

0.4.2 Planteamiento del problema de optimización

Sea x_i el número de unidades colocadas en la parte i

$$\begin{aligned}
\max f(x_1, x_2, ..., x_n) &= \prod_{i=1}^{n} p(i, x_i)\\
\sum_{i=1}^{n} c(i, x_i) &\le C,\\
1 \le x_i &\le v_i, \quad i = 1, ..., n,\\
x_i &\in \mathbb{Z}, \quad i = 1, ..., n.
\end{aligned}$$

Este problema se puede resolver con fuerza bruta, construyendo todas las posibilidades realizables y escogiendo la que maximice la probabilidad de que todo el sistema funcione.

0.4.3 Solución recurrente

La idea recurrente es la misma de los problemas anteriores, el problema se puede resolver dinámicamente, considerando inicialmente las mejores políticas para la primera parte, luego para la primera y segunda partes, en seguida para la primera, segunda y tercera partes y así sucesivamente hasta considerar todo el sistema eléctrico.

La cantidad de dinero que se gasta en las primeras k partes tiene que ser suficiente para colocar por lo menos una unidad en cada una de las primeras k partes, además debe permitir que con el resto se pueda colocar por lo menos una unidad en las restantes $n-k$ partes y no debe ser superior a la cantidad necesaria para colocar el número máximo de unidades en cada una de las primeras k partes. Entonces los límites de variación serán:

$$\begin{aligned}
C_k &= \sum_{i=1}^{k} c_{i1} \qquad\qquad 1 \le k \le n\\
D_k &= \min\left\{\sum_{i=1}^{k} c(i, v_i), C - \sum_{i=k+1}^{n} c_{i1}\right\}
\end{aligned}$$

$P_k^*(t) =$ probabilidad máxima de que el subsistema formado por las primeras k partes funcione, si se gastan t pesos en su construcción, donde $1 \le k \le n,\ C_k \le t \le D_k$.

Objetivo final:

$$P_n^*(C) = \ ?$$

Condiciones iniciales:

$$P_1^*(t) = \max_{1\le j\le v_1} \{p_{1j} \mid c_{1j} \le t\},\ \ C_1 \le t \le D_1$$

Relación recurrente: Si se dispone de t pesos para el subsistema formado por las partes 1, 2, ..., k, $k+1$, entonces se puede disponer de s pesos para las primeras k partes y el resto, $t-s$ pesos, para la parte $k+1$. Haciendo variar s se escoge la mejor posibilidad. Si $C_{k+1} \le t \le D_{k+1}$ entonces la relación recurrente es:

$$P_{k+1}^*(t) = \max_{\substack{0\le s\le t \\ 0\le t-s\le t \\ C_k\le t-s\le D_k \\ c(k+1,1)\le s\le c(k+1,v_{k+1})}} \{P_k^*(t-s)(\max_{1\le j\le v_{k+1}} \{p_{k+1,j} \mid c_{k+1,j} \le s\})\}.$$

En esta fórmula resultan 4 cotas inferiores y 4 cotas superiores para s. Algunas resultan redundantes. Sin embargo, ante la duda, es preferible escribir dos veces la misma cosa, que olvidar alguna restricción importante. Entonces s varía entre la mayor cota inferior y la menor cota superior.

El planteamiento puede resultar más claro si se define π_{it} como la máxima probabilidad de que la parte i funcione si se dispone de t pesos para su construcción,

$$\pi(i,t) = \pi_{it} := \max_{1\le j\le v_i} \{p_{ij} \mid c_{ij} \le t\},\ \ 1 \le i \le n,\ \ c(i,1) \le t \le c(i,v_i).$$

Basados en esta función π, la condiciones iniciales y la relación de recurrencia son:

$$\begin{aligned} P_1^*(t) &= \pi_{1t}, \quad C_1 \le t \le D_1, \\ P_{k+1}^*(t) &= \max_{\substack{t-D_k\le s\le t-C_k \\ c(k+1,1)\le s\le c(k+1,v_{k+1})}} \{P_k^*(t-s)\pi(k+1,s)\},\ \ C_{k+1} \le t \le D_{k+1}. \end{aligned}$$

0.4.4 Resultados numéricos

Consideremos los siguientes datos: $C = 10$, $n = 4$, v_i : 3, 3, 2, 3

$j \rightarrow$	1	2	3
p_{1j}	0.4	0.6	0.8
p_{2j}	0.5	0.6	0.7
p_{3j}	0.7	0.8	
p_{4j}	0.4	0.6	0.8

$j \rightarrow$	1	2	3
c_{1j}	2	3	5
c_{2j}	2	4	5
c_{3j}	2	5	
c_{4j}	1	3	6

entonces:

$$
\begin{aligned}
C_1 &= 2, \quad D_1 = 5,\\
C_2 &= 4, \quad D_2 = 7,\\
C_3 &= 6, \quad D_3 = 9,\\
C_4 &= 7, \quad D_4 = 10.
\end{aligned}
$$

Condiciones iniciales: con 2 pesos se puede colocar una unidad en la primera parte y la probabilidad de que la primera parte funcione es 0.4, con 3 pesos se pueden colocar dos unidades en la primera parte y la probabilidad de que esta parte funcione es 0.6, con 4 pesos se pueden colocar únicamente dos unidades en la primera parte y la probabilidad sigue siendo 0.6, con 5 pesos se pueden colocar tres unidades en la primera parte y la probabilidad de que funcione la primera parte pasa a ser 0.6.

$$
\begin{aligned}
P_1^*(2) &= \pi_{12} = 0.4, \quad s^* = 2,\\
P_1^*(3) &= \pi_{13} = 0.6, \quad s^* = 3,\\
P_1^*(4) &= \pi_{14} = 0.6, \quad s^* = 4,\\
P_1^*(5) &= \pi_{15} = 0.8, \quad s^* = 5.
\end{aligned}
$$

$\vdots$

Para el cálculo de $P_2^*(6)$ la variación de s está dada por $6 - D_1 \leq s \leq 6 - C_1$, $c_{21} \leq s \leq c(2, v_2)$, o sea, $6 - 5 \leq s \leq 6 - 2$, $\;2 \leq s \leq 5$,

$$
\begin{aligned}
P_2^*(6) &= \max_{2\leq s\leq 4}\{P_1^*(6-s)\pi_{2s}\} \\
&= \max\{P_1^*(4)\pi_{22},\ P_1^*(3)\pi_{23},\ P_1^*(2)\pi_{24}\} \\
&= \max\{0.6\times 0.5,\ 0.6\times 0.5,\ 0.4\times 0.6\} \\
P_2^*(6) &= 0.3,\ \ s^* = 2.
\end{aligned}
$$

$\vdots$

La tabla con el resumen de los reultados es la siguiente:

i	$P_1^*(i)$	s^*	$P_2^*(i)$	s^*	$P_3^*(i)$	s^*	$P_4^*(i)$	s^*
2	.4	2						
3	.6	3						
4	.6	4	.2	2				
5	.8	5	.3	2				
6			.3	2	.14	2		
7			.4	2	.21	2		
8					.21	2		
9					.28	2		
10							.126	3

Con 10 pesos disponibles, la probabilidad máxima de que el sistema funcione es 0.126, asignando 3 pesos para la cuarta parte, o sea, con 2 unidades en la cuarta parte. Quedan 7 pesos y el s^* correspondiente a $P_3^*(7)$ es 2, luego con 2 pesos se coloca una unidad en la tercera parte. Quedan 5 pesos y el s^* correspondiente a $P_2^*(5)$ es 2, luego con 2 pesos se coloca una unidad en la segunda parte. Quedan 3 pesos y el s^* correspondiente a $P_1^*(5)$ es 3, luego con 3 pesos se colocan dos unidades en la primera parte.

$$
\begin{aligned}
x_1^* &= 2, \\
x_2^* &= 1, \\
x_3^* &= 1, \\
x_4^* &= 2, \\
P_4^*(10) &= 0.126\,.
\end{aligned}
$$

0.5 PROBLEMA DE MANTENIMIENTO Y CAMBIO DE EQUIPO POR UNO NUEVO

0.5.1 Enunciado del problema

Hoy 31 de diciembre del año 0, el señor Tuta y su socio el señor Rodríguez, propietarios de un bus de e_0 años de edad, desean planificar su política de mantenimiento y compra de su equipo de trabajo, es decir de su bus, durante n años. La decisión de seguir con el mismo equipo o comprar uno nuevo se toma una vez al año, cada primero de enero. El señor Tuta tiene mucha experiencia y puede evaluar de manera bastante precisa los siguientes valores.

- u : vida útil del equipo, en años,
- p_i : precio de un equipo nuevo al empezar el año i, $1 \leq i \leq n$,
- $m_{ij} = m(i,j)$: precio del mantenimiento durante el año i, desde el 2 de enero hasta el 31 de diciembre, de un equipo que al empezar ese año (el 2 de enero), tiene j años de edad, $1 \leq i \leq n$, $0 \leq j \leq u-1$,
- $v_{ij} = v(i,j)$: precio de venta, el 1 de enero del año i, de un equipo que en esta fecha tiene j años de edad, $1 \leq i \leq n+1$, $1 \leq j \leq u$.

La decisión de comprar un equipo nuevo o guardar el que se tiene, se toma y se lleva a cabo el 1 de enero de cada año. Al final de los n años la compañía vende el equipo que tenga.

0.5.2 Solución recurrente

Sea E_k el conjunto de valores correspondientes a la edad que puede tener el equipo al finalizar el año k. Si $e_0 < u$ entonces la edad que puede tener el equipo al finalizar el primer año es 1 (si se compra uno nuevo) o e_0+1 (si se continua con el mismo equipo durante el primer año), entonces $E_0 = \{1, e_0+1\}$. Si $e_0 = u$ entonces la edad del equipo al finalizar el primer año es necesariamente 1, luego $E_0 = \{1\}$. De manera análoga, dependiendo de e_0 las edades al finalizar el segundo año pueden ser: $E_2 = \{1, 2, e_0+2\}$ o $E_2 = \{1, 2\}$. En general

$$
\begin{aligned}
E_0 &= \{e_0\}, \\
E_{k+1} &= \{\,1\,\} \cup \{j+1 : j \in E_k,\ j < u\}.
\end{aligned}
$$

Sea

$C_k^*(e) =$ costo mínimo de la política de compra y mantenimiento del equipo desde el 31 de diciembre del año 0 hasta el 31 de diciembre del año k, de tal manera que el 31 de diciembre del año k el equipo tiene e años de edad, $1 \leq k \leq n,\ \ e \in E_k$.

Si el 31 de diciembre del año n el equipo tiene e años entonces hay que vender el 1 de enero del año $n+1$ a un precio $v(n+1,e)$. Entonces se debe escoger la mejor opción entre las posibles. O sea, el objetivo final es conocer el valor:

$$\min_{e \in E_n} \{C_n^*(e) - v_{n+1,e}\} = \ ?$$

Condiciones iniciales: Si al empezar el primer año se compra un bus nuevo, bien sea porque $e_0 = u$ o bien sea porque se tomó esa decisión, se recupera el dinero de la venta, se compra un bus nuevo y durante el primer año se gasta en el mantenimiento de un bus con 0 años, así al final del primer año el bus tiene 1 año. Si no se compra bus entonces el único gasto es el manteniemiento de un bus de e_0 años, y al final del primer año el bus tiene $e_0 + 1$ años.

$$C_1^*(e) = \begin{cases} m(1, e_0) & \text{si } e = e_0 + 1, \\ -v(1, e_0) + p_1 + m_{1,0} & \text{si } e = 1. \end{cases}$$

Relación de recurrencia: Si e indica la edad del bus al final del año $k+1$, entonces $e = 1$ o e toma otros valores en E_{k+1}. Si $e > 1$ entonces al costo de la política óptima de los primeros k años se le aumenta el costo del mantenimiento de un bus con $e-1$ años. Si $e = 1$ entonces al final del año k el bus podía tener d años, luego para cada edad d se toma el valor $C_k^*(d)$, se le resta lo de la venta, se le suma el valor de la compra y se le agrega el costo del mantemiento, y finalmente se escoge el menor valor.

$$C_{k+1}^*(e) = \begin{cases} \min\limits_{d \in E_k} \{C_k^*(d) - v_{k+1,d}\} + p_{k+1} + m_{k+1,0} & \text{si } e = 1, \\ C_k^*(e-1) + m_{k+1,e-1} & \text{si } e > 1. \end{cases}$$
$$k = 1, ..., n-1,\ \ e \in E_{k+1}.$$

0.5.3 Resultados numéricos

Consideremos los siguientes datos: $n = 4,\ \ u = 4,\ \ e_0 = 2,\ \ p_i:$ 10, 12, 14, 15.

i	m_{i0}	m_{i1}	m_{i2}	m_{i3}
1	1	3	4	6
2	1	3	4	5
3	1	2	4	6
4	2	3	4	5

i	v_{i1}	v_{i2}	v_{i3}	v_{i4}
1	6	4	3	2
2	6	4	3	1
3	7	5	3	2
4	7	4	3	2
5	6	4	2	0

Entonces:

$$\begin{aligned} E_1 &= \{1, 3\}, \\ E_2 &= \{1, 2, 4\}, \\ E_3 &= \{1, 2, 3\}, \\ E_4 &= \{1, 2, 3, 4\}. \end{aligned}$$

Condiciones iniciales:

$$\begin{aligned} C_1^*(1) &= -4 + 10 + 1 = 7, \\ C_1^*(3) &= 4. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_2^*(1) &= \min_{d \in E_1} \{C_1^*(d) - v_{2d}\} + p_2 + m_{20} \\ &= \min\{C_1^*(1) - v_{21}, C_1^*(3) - v_{23}\} + p_2 + m_{20} \\ &= \min\{\overline{7 - 6}, 4 - 3\} + 12 + 1 \\ C_2^*(1) &= 14, \;\; d^* = 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_2^*(4) &= C_1^*(3) + m_{23} \\ &= 4 + 5 = 9, \;\; d^* = 3. \end{aligned}$$

⋮

La tabla con el resumen de los reultados es la siguiente:

e	$C_1^*(e)$	$s*$	$C_2^*(e)$	s^*	$C_3^*(e)$	s^*	$C_4^*(e)$	s^*
1	7	2	14	1	20	2	28	3
2			10	1	16	1	23	1
3	4	2			14	2	20	2
4			9	3			19	3

Ahora es necesario encontrar $\min\limits_e \{C_4^*(e) - v_{5e}\}$, es decir, el mínimo de $28 - 6$, $23 - 4$, $20 - 2$, $19 - 0$. Este valor mínimo es 18 y se obtiene para $e = 3$. Si e_k indica la edad del bus al finalizar el año k, entonces $e_4 = 3$, $e_3 = 2$, $e_2 = 1$. Al mirar en la tabla, para $C_2^*(1)$ se tiene que $d^* = 1$, o sea, $e_1 = 1$.

Si x_k indica la decisión tomada al empezar el año k, con la convención

$x_k = 0$: se compra un bus nuevo,

$x_k = 1$: se mantiene el bus que se tiene,

entonces se puede decir que $e_k = 1 \Rightarrow x_k = 0$ y que $e_k > 1 \Rightarrow x_k = 1$.

$$\begin{aligned} x_1^* &= 0, \\ x_2^* &= 0, \\ x_3^* &= 1, \\ x_4^* &= 1. \end{aligned}$$

0.6 PROBLEMA DE PRODUCCION Y ALMACENAMIENTO

0.6.1 Enunciado del problema

Considere una compañía que fabrica un bien no perecedero. Esta compañía estimó de manera bastante precisa las demandas d_1, d_2, ..., d_n de los n períodos siguientes. La producción en el período i, denotada por p_i, puede ser utilizada, en parte para satisfacer la demanda d_i, o en parte puede ser almacenada para satisfacer demandas posteriores. Para facilitar la comprensión del problema, supóngase que la demanda de cada período se satisface en los últimos dias del período. Sea x_i el inventario al final del período $i - 1$ despues de satisfacer la demanda d_{i-1}, es decir, el inventario al empezar el período i. El costo $c_i(x_i, p_i)$ de almacenar x_i unidades y producir p_i unidades durante el período i se supone conocido. También se conoce x_1 el inventario inicial y x_{n+1} el inventario deseado al final de los n períodos.

Se desea planear la producción y el almacenamiento de cada período, de manera que permitan cumplir con las demandas previstas y se minimice el costo total de almacenamiento y producción.

Para facilitar el planteamiento se puede suponer que el inventario deseado al final de los n periodos se puede incluir en la demanda del último periodo d_n, o sea, hacer $d_n \leftarrow d_n + x_{n+1}$, $x_{n+1} \leftarrow 0$.

0.6.2 Planteamiento del problema de optimización

Las variables de este problema son: x_2, x_3, ..., x_n, p_1, p_2, ..., p_n. Recordemos que x_1, x_{n+1} son datos del problema. Las variables están relacionadas por las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} x_1 + p_1 - d_1 &= x_2 \\ x_2 + p_2 - d_2 = x_1 + p_1 - d_1 + p_2 - d_2 &= x_3 \\ x_3 + p_3 - d_3 = x_1 + p_1 - d_1 + p_2 - d_2 + p_3 - d_3 &= x_4 \end{aligned}$$

En general,

$$x_i + p_i - d_i = \sum_{j=1}^{i} p_j - \sum_{j=1}^{i} d_j + x_1 = x_{i+1}, \;\; i = 1, ..., n. \tag{1}$$

Es claro que para $i = n$,

$$x_n + p_n - d_n = \sum_{j=1}^{n} p_j - \sum_{j=1}^{n} d_j + x_1 = 0. \tag{2}$$

Sea

$$D_i = \sum_{j=1}^{i} d_j - x_1, \quad i = 1, ..., n, \tag{3}$$

es decir, la demanda neta acumulada de los primeros i períodos, descontando el inventario inicial. En particular, toda la producción esta dada por $\sum_{j=1}^{n} p_j = D_n$. Entonces las igualdades que relacionan las variables son:

$$\sum_{j=1}^{i-1} p_j - D_{i-1} = x_i, \;\; i = 2, ..., n, \tag{4}$$

$$\sum_{j=1}^{n} p_j - D_n = 0. \tag{5}$$

El problema de optimización es entonces:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{i=1}^{n} c_i(x_i, p_i) \\
& \sum_{j=1}^{i-1} p_j - D_{i-1} = x_i, \quad i = 2, \ldots, n \\
& \sum_{j=1}^{n} p_j - D_n = 0, \\
x_2, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n \geq 0, & \\
x_2, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n \in \mathbb{Z}. &
\end{aligned}
$$

El problema se puede plantear únicamente con las variables p_1, ..., p_{n-1}. A partir de (2) y (4) se tiene

$$
\begin{aligned}
-x_n + d_n &= p_n, \\
-\sum_{j=1}^{n-1} p_j + D_{n-1} + d_n &= p_n, \\
D_n - \sum_{j=1}^{n-1} p_j &= p_n.
\end{aligned}
$$

La función objetivo se puede agrupar en tres partes:

$$
\min \; c_1(x_1, p_1) + \sum_{i=2}^{n-1} c_i(x_i, p_i) + c_n(x_n, p_n)
$$

Entonces el problema, expresado únicamente con las variables p_1, ..., p_{n-1}, es :

$$
\begin{aligned}
\min\ & c_1(x_1,p_1)+\sum_{i=2}^{n-1} c_i\Big(\sum_{j=1}^{i-1} p_j - D_{i-1}, p_i\Big) \\
& \qquad + c_n\Big(\sum_{j=1}^{n-1} p_j - D_{n-1}, D_n - \sum_{j=1}^{n-1} p_j\Big) \\
& \sum_{j=1}^{i-1} p_j - D_{i-1} \geq 0, \quad i=2,...,n, \\
& \quad D_n - \sum_{j=1}^{n-1} p_j \geq 0, \\
& \qquad\qquad p_i \geq 0,\ p_i \in \mathbb{Z}, \quad i=1,...,n-1.
\end{aligned}
$$

Para resolver este problema por la fuerza bruta, estudiando todas las posibilidades, basta con considerar que el mayor valor de p_i se tiene cuando esta producción satisface por sí sola toda la demanda de los períodos i, $i+1$, ..., n. En ese caso no habría producción en los períodos $i+1$, ..., n. Dicho de otra forma, la producción en el período i no debe ser mayor que la demanda acumulada de los períodos i, ..., n.

Sea

$$E_i = \sum_{j=i}^{n} d_j, \quad i=1,...,n,$$

entonces los siguientes son límites para la variación de las variables p_i

$$0 \leq p_i \leq E_i, \quad i=1,...,n-1$$

Obviamente los valores p_1, ..., p_{n-1} deben cumplir las otras restricciones. Igualmente es claro que para las variables x_i también se tiene la misma restricción, o sea, ni el inventario al empezar el período i, ni la producción durante el período i pueden ser superiores a E_i

De la definición de D_i y E_i se deduce inmediatamente que

$$D_i + E_{i+1} = D_n, \quad i=1,...,n-1$$

0.6.3 Solución recurrente

Sea

$$
\begin{aligned}
C_k^*(q) = {} & \text{costo mínimo de producir en total } q \text{ unidades durante} \\
& \text{los primeros } k \text{ períodos tal manera que se satisfagan las} \\
& \text{demandas de estos períodos, } 1 \le k \le n.
\end{aligned}
$$

La producción acumulada de los primeros k períodos debe ser suficiente para satisfacer la demanda total de estos k períodos (descontando x_1) y no debe sobrepasar la demanda total de los n períodos, entonces en la definición de $C_k^*(q)$ la variación de q está dada por

$$D_k \le q \le D_n.$$

Objetivo final:

$$C_n^*(D_n) = ?$$

Condiciones iniciales:

$$C_1^*(q) = c_1(x_1, q), \;\; D_1 \le q \le D_n.$$

Si en los primeros $k+1$ períodos la producción es de q unidades y la producción en el período $k+1$ es de y unidades, entonces la producción en los primeros k períodos es de $q-y$ unidades y el inventario durante el período $k+1$ es $q-y-D_k$.

Relación recurrente:

$$C_{k+1}^*(q) = \min_{\substack{0 \le q-y \le q \\ D_k \le q-y \le D_n \\ 0 \le q-y-D_k \le E_{k+1} \\ 0 \le \, y \, \le E_{k+1}}} \{C_k^*(q-y) + c_{k+1}(q-y-D_k, y)\},$$

definida para $k = 1, \ldots, n-1, \;\; D_{k+1} \le q \le D_n$.

De las anteriores cotas inferiores y superiores para y y para $q-y$ se deduce fácilmente que $0 \le y \le q - D_k$. En resumen

$$C_{k+1}^*(q) = \min_{0 \le y \le q-D_k} \{C_k^*(q-y) + c_{k+1}(q-y-D_k, y)\}.$$

0.6.4 Resultados numéricos

Consideremos los siguientes datos: $n = 4$, $d_i = 2, 3, 2, 5$, $c_i(x_i, p_i) = hx_i + \gamma_i p_i$, $h = 2$, $\gamma_i = 1, 4, 3, 6$, $x_1 = 1$, $x_5 = 0$.

Entonces

$$D_1 = 1,\ D_2 = 4,\ D_3 = 6,\ D_4 = 11.$$

$$\begin{aligned} C_1^*(q) &= c_1(x_1, q) \\ &= 2x_1 + 1q \\ &= 2 + q, \quad 1 \le q \le 11. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_2^*(q) &= \min_{0 \le y \le q-1} \{C_1^*(q-y) + c_2(q-y-, y)\} \\ &= \min_{0 \le y \le q-1} \{2 + (q-y) + 2(q-y-1) + 4y\} \\ &= \min_{0 \le y \le q-1} \{3q + y\}, \quad y^* = 0 \\ &= 3q, \quad 4 \le q \le 11. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_3^*(q) &= \min_{0 \le y \le q-4} \{C_2^*(q-y) + c_3(q-y-4, y)\} \\ &= \min_{0 \le y \le q-4} \{3(q-y) + 2(q-y-4) + 3y\} \\ &= \min_{0 \le y \le q-4} \{5q - 2y - 8\}, \quad y^* = q-4 \\ &= 3q, \quad 6 \le q \le 11. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_4^*(11) &= \min_{0 \le y \le 11-6} \{C_3^*(11-y) + c_4(11-y-6, y)\} \\ &= \min_{0 \le y \le 5} \{3(11-y) + 2(5-y) + 6y\} \\ &= \min_{0 \le y \le 5} \{43 + y\}, \quad y^* = 0 \\ &= 43. \end{aligned}$$

La producción óptima en el cuarto período es 0, luego la producción en los tres primeros períodos es 11. La producción óptima en el tercer período es $q - 4 = 11 - 4 = 7$, luego la producción en los dos primeros períodos es 4. La producción óptima en el segundo período es 0, entonces la producción óptima para el primer período es 4

$$
\begin{aligned}
p_4^* &= 0, \\
p_3^* &= 7, \\
p_2^* &= 0, \\
p_1^* &= 4, \\
C_4^*(11) &= 43.
\end{aligned}
$$

EJERCICIOS

12.1 Una corporación tiene n plantas de producción, P_1, P_2, ..., P_n. De cada una de ellas recibe propuestas para una posible expansión de las instalaciones. La corporación tiene un presupuesto de D billones de pesos para asignarlo a las n plantas. El gerente de la planta P_j envía m_j propuestas, indicando c_{ij} el costo de su propuesta i-ésima, $1 \leq i \leq m_j$, y g_{ij} la ganancia adicional total acumulada al cabo de 10 años, descontando la inversión. Obviamente en cada planta se lleva a cabo una sola propuesta. Una propuesta válida para cada una de las plantas consiste en no invertir en expansión, siendo su costo y ganancia nulos. Más aún, se podría pensar que en este caso la ganancia podría ser negativa. El gerente de cada planta envió las propuestas ordenadas por costo en orden creciente es decir, $c_{ij} \leq c_{i+1,j}$, $i = 1, ..., m_j - 1$. Se supone que a mayor costo, también mayor ganancia.

Plantee el problema de optimización. Resuelva el problema por PD: defina una función que permita la recurrencia, dé las condiciones iniciales, la relación de recurrencia.

Resuelva el problema para los siguientes valores numéricos: $n = 3$, $D = 5$,

	Planta 1		Planta 2		Planta 3	
	c_{i1}	g_{i1}	c_{i2}	g_{i2}	c_{i3}	g_{i3}
Prop. 1	0	0	0	0	0	0
Prop. 2	2	8	1	5	1	3
Prop. 3	3	9	2	6		
Prop. 4	4	12				

12.2 El proceso de manufactura de un bien perecedero es tal que el costo de cambiar el nivel de producción de un mes al siguiente es \$$a$ veces el cuadrado de la diferencia de los niveles de producción. Cualquier cantidad del producto que no se haya vendido al final del mes se desperdicia con un costo de \$$b$ por unidad. Si se conoce el pronóstico de ventas d_1 , d_2 , $\ldots$, d_n para los próximos n meses y se sabe que en el último mes (el mes pasado) la producción fue de x_0 unidades.

Plantee el problema de optimización. Resuelva el problema por PD: defina una función que permita la recurrencia, dé las condiciones iniciales, la relación de recurrencia.

Resuelva el problema para los siguientes valores numéricos: $n = 4$, $a = 1$, $b = 2$, $d_i = 42$, 44, 39,36, $x_0 = 40$.

12.3 Considere el problema del morral con cotas inferiores y superiores con los siguientes datos: C = capacidad en kilos del morral (entero posotivo); n número de alimentos; p_1, p_2, ..., p_n, donde p_i es un entero positivo que indica el peso, en kilos, de un paquete del alimento i; b_1, b_2, ..., b_n, donde b_i indica el beneficio de un paquete del alimento i; u_1, u_2, ..., u_n, donde u_i es un entero no negativo que indica el número mínimo de paquetes del alimento i que el montañista debe llevar; v_1, v_2, ..., v_n, donde v_i es un entero que indica el número máximo de paquetes del alimento i que el montañista debe llevar. Los datos cumplen con la condición $u_i < v_i \ \forall i$.

Plantee el problema de optimización. Resuelva el problema por PD: defina una función que permita la recurrencia, dé las condiciones iniciales, la relación de recurrencia.

12.4 A partir del lunes próximo usted tiene n exámenes finales y $m \geq n$ días para prepararlos. Teniendo en cuenta el tamaño y la dificultad del tema usted a evaluado c_{ij} la posible nota o calificación que usted obtendría si dedica i días para estudiar la materia j. Usted ha estudiado regularmente durante todo el semestre y en todas sus materias tiene buenas notas de tal forma que aún obteniendo malas notas en los exámenes finales usted aprobará todas las materias. En consecuencia su único interés es obtener el mejor promedio posible. De todas maneras piensa dedicar por lo menos un día para cada materia.

Plantee el problema de optimización. Resuelva el problema por PD: defina una función que permita la recurrencia, dé las condiciones iniciales, la relación de recurrencia.

Resuelva el problema para los siguientes valores numéricos: $n = 4$ materias, $m = 7$ días,

c_{0j}	10	10	05	05
c_{1j}	20	15	35	10
c_{2j}	23	25	30	20
c_{3j}	25	30	40	35
c_{4j}	40	35	42	40
c_{5j}	45	40	45	45
c_{6j}	48	48	45	48
c_{7j}	50	48	48	50

12.5 Una empresa agrícola tiene actualmente x_0 empleados y conoce de manera bastante precisa las necesidades de mano de obra para las siguientes n semanas de cosecha, es decir, conoce los valores e_i, $i = 1, ..., n$, donde e_i es el número de empleados necesarios durante la semana i. También conoce: $c_i(j)$ el precio de contratar j empleados nuevos al empezar la semana i, $i = 1, ..., n$; $d_i(j)$ el costo de despedir j empleados al finalizar la semana i, $i = 0, ..., n$; y $m_i(j)$ el costo de mantener sin trabajo (pero con sueldo) j empleados durante la semana i, $i = 1, ..., n$. Después de las n semanas de cosecha, la empresa únicamente necesita e_{n+1}, un número pequeño de empleados que se quedan trabajando por varias semanas. La empresa desea saber cuantos empleados debe tener durante cada una de las n semanas.

Plantee el problema de optimización. Resuelva el problema por PD: defina una función que permita la recurrencia, dé las condiciones iniciales, la relación de recurrencia.

Resuelva el problema para los siguientes valores numéricos: $n = 4$, $x_0 = 10$, $e_i = 30, 45, 40, 25$, $e_{n+1} = 5$, $c_i(j) = 10 + 3j$, $d_i(j) = 6j$, $m_i(j) = 8j$.

12.6 Un zoocriadero de chigüiros tiene actualmente x_0 animales y tiene capacidad para una gran cantidad de ellos. En un año el número de chiguiros se multiplica por $a > 1$. Al principio de cada año (del año i) el gerente toma la decisión de vender algunos chigüiros al precio unitario p_i, $i = 1, ..., n+1$. Después de n años se venden todos los chigüiros. El gerente desea saber cuantos chigüiros debe vender al comienzo de cada uno de los n años.

Plantee el problema de optimización. Resuelva el problema por PD: defina una función que permita la recurrencia, dé las condiciones iniciales, la relación de recurrencia.

Resuelva el problema para los siguientes valores numéricos: $n = 4$, $x_0 = 5$, $a = 3$, $p_i = 50, 10, 60, 25, 45$.

12.7 Resuelva por PD el siguiente problema de optimización:

$$\min \quad f(x_1, x_2) = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 4)^2 + (x_1 - x_2)^2$$

Sugerencia. Fije una variable y halle la solución (en función de la variable fija). Haga variar la variable que estaba fija.

12.8 Resuelva por PD el siguiente problema de PL:

$$\begin{array}{lrcl}
\max & z = x_1 + 1.4x_2 & & \\
 & x_1 + x_2 & \leq & 40 \\
 & x_1 + 2x_2 & \leq & 58 \\
 & x & \geq & 0.
\end{array}$$